# TD n° 2 : Récurrence - Sommes

**Exercice 1**

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! \geqslant 2^{n-1}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

**Exercice 2**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer de deux façons différentes $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right]$ et retrouver la formule donnant $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

**Exercice 3**

a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de $n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 4**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

a) Montrer, par récurrence, que : $S_n(x) = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.

b) Retrouver ce résultat en exprimant de deux manières différentes $S_{n+1}(x)$ à l'aide de $S_n(x)$.

c) En écrivant $kx^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x^k$, retrouver le résultat du a).

**Exercice 5**

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in [\![1, n]\!],\ \dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1} = \dfrac{n(n-1)}{p(p-1)}\dbinom{n-2}{p-2}$ si $p \geqslant 2$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ \forall p \in [\![1, n-1]\!],\ \dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \dbinom{2}{2} + \dbinom{3}{2} + \cdots + \dbinom{n}{2} = \dbinom{n+1}{3}$.

**Exercice 6**

Simplifier les expressions suivantes : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$ et $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$

**Exercice 7**

Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{j}{i}$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

**Exercice 8**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$.

**Indications pour les exercices du TD n° 2**

ex. 1 : a) poser l'H.R. puis multiplier par $n+1$ et soustraire $2^n$ ; b) ajouter $2n+1$ de chaque côté ; c) découper la somme obtenue au rang $n+1$ pour faire apparaître la somme au rang $n$ puis isoler le 1er terme de celle-ci et conclure avec le changement d'indice $k' = k-1$.
ex. 2 : reconnaître un télescopage ou calculer en développant l'expression, puis égaler les deux résultats.
ex. 3 : a) réduire la fraction de droite et identifier les numérateurs ; b) reconnaître une somme télescopique grâce à a).
ex. 4 : a) poser l'H.R. et ajouter $(n+1)x^{n+1}$ puis réduire la fraction ; b) séparer le 1er terme de $S_{n+1}(x)$, mettre $x$ en facteur puis changer d'indice et couper la somme obtenue en deux, enfin égaler avec la somme obtenue en séparant le dernier terme de $S_{n+1}(x)$ ; c) écrire $S_n(x)$ comme une somme double et utiliser la propriété du cours.
ex. 5 : a) partir du membre de droite et utiliser les factorielles.
b) idem en réduisant les fractions au même dénominateur.
c) récurrence sur $n$.
ex. 6 : pour $S$, utiliser le binôme et pour $T$, transformer d'abord le produit des coefficients du binôme en revenant aux factorielles.
ex. 7 : pour la seconde somme, sommer sur $i$ puis sur $j$.
ex. 8 : additionner les puissances de 2.

**Indications pour les exercices du TD n° 2**

ex. 1 : a) poser l'H.R. puis multiplier par $n+1$ et soustraire $2^n$ ; b) ajouter $2n+1$ de chaque côté ; c) découper la somme obtenue au rang $n+1$ pour faire apparaître la somme au rang $n$ puis isoler le 1er terme de celle-ci et conclure avec le changement d'indice $k' = k-1$.
ex. 2 : reconnaître un télescopage ou calculer en développant l'expression, puis égaler les deux résultats.
ex. 3 : a) réduire la fraction de droite et identifier les numérateurs ; b) reconnaître une somme télescopique grâce à a).
ex. 4 : a) poser l'H.R. et ajouter $(n+1)x^{n+1}$ puis réduire la fraction ; b) séparer le 1er terme de $S_{n+1}(x)$, mettre $x$ en facteur puis changer d'indice et couper la somme obtenue en deux, enfin égaler avec la somme obtenue en séparant le dernier terme de $S_{n+1}(x)$ ; c) écrire $S_n(x)$ comme une somme double et utiliser la propriété du cours.
ex. 5 : a) partir du membre de droite et utiliser les factorielles.
b) idem en réduisant les fractions au même dénominateur.
c) récurrence sur $n$.
ex. 6 : pour $S$, utiliser le binôme et pour $T$, transformer d'abord le produit des coefficients du binôme en revenant aux factorielles.
ex. 7 : pour la seconde somme, sommer sur $i$ puis sur $j$.
ex. 8 : additionner les puissances de 2.