TD n° 1 : Ensembles et Applications

Exercice 1

Écrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs, puis leur contraposée (pour 2.) et leur négation :

1. Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres.
2. Si un nombre réel positif est inférieur ou égal à 1, il est inférieur ou égal à son carré.

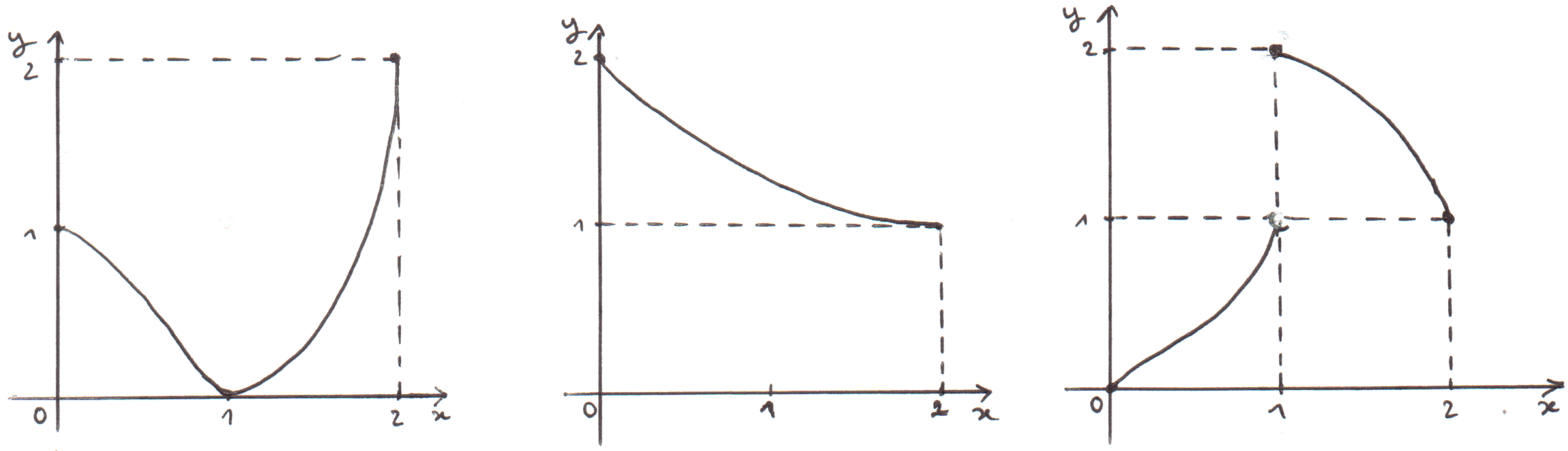
Exercice 2

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1. Que peut-on dire de A et B si $A \cup B = A \cap B$?
2. Montrer que : $A \cup B = A \cap C \Longrightarrow B \subset A \subset C$.
3. Montrer que : $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset \overline{A \cap B}$. A-t-on l'égalité ?

Exercice 3

Dire, dans chacun des cas, si le graphe peut être celui d'une application injective, surjective, bijective de $[0,2]$ dans $[0,2]$.



Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. En déduire que l'équation $x + e^x = 1$ a une seule solution et la déterminer.
3. La propriété du 1. reste-t-elle vraie si on remplace injective par surjective ?

Exercice 5

On considère l'application
$$f : \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \longrightarrow &]3, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+1}{x-1} \end{array}.$$

1. Montrer que f est injective, puis surjective. Que peut-on en conclure ?
2. Déterminer f^{-1}.

Exercice 6

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Déterminer $f \circ f$ et retrouver le résultat précédent.

Exercice 7

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.