TD n° 16 : Calcul intégral

Exercice 1

Déterminer les primitives de $f : x \longmapsto 2\left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)$, $h : x \longmapsto \sqrt{x}$, $k : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, en précisant à chaque fois l'intervalle(s) de validité.

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. On note $m = \underset{[0,1]}{\mathrm{Min}}\, f$ et $M = \underset{[0,1]}{\mathrm{Max}}\, f$. Que peut-on dire de la fonction $(M-f)(f-m)$?

2. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$.

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe c-à-d qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 4

Soit $G : x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition D de G puis montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
2. Calculer $G'(x)$. Conclusion ?

Exercice 5

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer u_0, u_1, puis montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Conclusion ?

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Conclure.

c) En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6

À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$; $J = \displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$; $K(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ pour $x > 0$; $M(x) = \displaystyle\int_1^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$ (double I.P.P).

Exercice 7

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ 2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

Exercice 8

a) Montrer que, pour tout réel a et tout réel x, on a $e^x \geqslant e^a + (x-a)e^a$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

b) Montrer que : $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{f(t)}\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour quelle(s) fonction(s) a-t-on l'égalité ?

Exercice 9

À l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales ou primitives suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_0^5 (x+2)\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x$ avec $u = \sqrt{x+4}$; b) $\forall x > 0,\ J(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$;

c) $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ avec $x = \cos(u)$; d) $\forall t \in \mathbb{R},\ L(t) = \displaystyle\int \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t$ avec $u = e^t$;

e) $M = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t + t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln(t)$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x)+\sin^n(x)}\,\mathrm{d}x$ en utilisant un changement de variable simple qui conserve l'intervalle d'intégration.

Exercice 11

Pour $n \geqslant 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Trouver la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

2) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $|I_n - J_n| \leqslant \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

3) Calculer J_n pour $n \geqslant 1$. *Indication : On pourra utiliser un changement de variable.*

4) En déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12

a) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 13

a) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Soit h, fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $h(1) = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14

Déterminer la limite des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad ; \quad T_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \quad ; \quad U_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)} \; ; \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+\sqrt{k}}{n^2+k^2}.$$

Indications pour les exercices du TD n° 16

Ex. 1 : $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$... ; $\sqrt{x} = x^{1/2}$... ; $\sqrt{u}' = \cdots$.

Ex. 2 : 1. $m \leqslant f \leqslant M$ donc... ; intégrer $(M-f)(f-m)$ puis développer par linéarité.

Ex. 3 : utiliser $t \longmapsto f(t) - t$ et calculer son intégrale puis raisonner par l'absurde.

Ex. 4 : 1. il faut $[1/x, x] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc... puis exprimer G à l'aide d'une primitive quelconque de la fonction ; 2. ok

Ex. 5 : a) ok et calculer $u_{n+1} - u_n$ avec la linéarité puis positivité de $\int$; b) majorer u_n en "majorant" la fonction par t^n ; c) I.P.P. avec $u'(t) = t^n$.

Ex. 6 : $u'(x) = xe^{x^2}$; $u'(t) = t$; $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $u'(t) = 1$ deux fois.

Ex. 7 : I.P.P. dans I_n en primitivant $x \longmapsto x$.

Ex. 8 : a) étudier $x \longmapsto e^x - e^a - (x-a)e^a$; b) appliquer a) avec $x = f(t)$ et $a = \int_0^1 f$; utiliser le critère de nullité pour étudier le cas d'égalité.

Ex. 9 : ok

Ex. 10 : poser $u = \dfrac{\pi}{2} - x$.

Ex. 11 : 1. "majorer" la fonction par x^{2n} ; 2. majorer $|I_n - J_n|$ en utilisant $1 + x^n \geqslant 1$; 3. poser $u = 1 + x^n$; 4. majorer $\left|\dfrac{I_n}{J_n} - 1\right|$ ou encadrer $\dfrac{I_n}{J_n}$ grâce à 2. et 3.

Ex. 12 : a) encadrer d'abord la fonction sur $[k, k+1]$ puis intégrer ; b) ajouter les inégalités obtenues en a) pour k variant de 1 à n ; en déduire un encadrement de u_n puis de $\dfrac{u_n}{\ln n}$. Conclure.

Ex. 13 : a) majorer l'intégrale en majorant $|f(t)|$ par la borne supérieure de $|f|$ sur $[0,1]$; b) intégrer deux fois par parties puis appliquer a) à h''.

Ex. 14 : appliquer le théorème sur les sommes de Riemann directement pour S_n, avec un changement d'indice pour T_n, après avoir pris le logarithme pour U_n et en découpant la somme V_n en deux.