

TD n° 16 : Calcul intégralExercice 1

Déterminer les primitives de $f : x \mapsto 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$, $h : x \mapsto \sqrt{x}$, $k : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, en précisant à chaque fois l'intervalle(s) de validité.

Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

1. On note $m = \underset{[0,1]}{\text{Min}} f$ et $M = \underset{[0,1]}{\text{Max}} f$. Que peut-on dire de la fonction $(M - f)(f - m)$?
2. En déduire l'inégalité : $\int_0^1 f^2(t) dt \leq -mM$.

Exercice 3

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe c-à-d qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 4

Soit $G : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition D de G puis montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
2. Calculer $G'(x)$. Conclusion ?

Exercice 5

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

a) Calculer u_0, u_1 , puis montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Conclusion ?

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Conclure.

c) En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

Exercice 6

À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$; $J = \int_1^e t \ln(t) dt$; $K(x) = \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

pour $x > 0$; $M(x) = \int_1^x \cos(\ln(t)) dt$ pour $x > 0$ (double I.P.P).

Exercice 7

Soit $I_n = \int_1^e x \ln^n(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \geq 1$, $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

Exercice 8

a) Montrer que, pour tout réel a et tout réel x , on a $e^x \geq e^a + (x-a)e^a$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

b) Montrer que : $\exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 e^{f(t)} dt$ où f est une fonction continue de l'intervalle $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour quelle(s) fonction(s) a-t-on l'égalité ?

Exercice 9

À l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales ou primitives suivantes :

a) $I = \int_0^5 (x+2)\sqrt{x+4} dx$ avec $u = \sqrt{x+4}$; b) $\forall x > 0$, $J(x) = \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$;

c) $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ avec $x = \cos(u)$; d) $\forall t \in \mathbb{R}$, $L(t) = \int \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$ avec $u = e^t$;

e) $M = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t + t \ln^2(t)} dt$ avec $u = \ln(t)$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x) + \sin^n(x)} dx$ en utilisant un changement de variable simple qui conserve l'intervalle d'intégration.

Exercice 11

Pour $n \geq 1$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx$.

- 1) Trouver la limite de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n(n+1)}$.
- 3) Calculer J_n pour $n \geq 1$. *Indication : On pourra utiliser un changement de variable.*
- 4) En déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12

- a) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
- b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Démontrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 13

- a) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.
- b) Soit h , fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$, telle que $h(1) = 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 t^n h(t) dt$.

Exercice 14

Déterminer la limite des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad ; \quad T_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \quad ; \quad U_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \quad ; \quad V_n = \sum_{k=1}^n \frac{n + \sqrt{k}}{n^2 + k^2}.$$

Indications pour les exercices du TD n° 16

Ex. 1 : $\frac{1}{x^3} = x^{-3} \dots$; $\sqrt{x} = x^{1/2} \dots$; $\sqrt{u}' = \dots$.

Ex. 2 : 1. $m \leq f \leq M$ donc... ; intégrer $(M-f)(f-m)$ puis développer par linéarité.

Ex. 3 : utiliser $t \mapsto f(t) - t$ et calculer son intégrale puis raisonner par l'absurde.

Ex. 4 : 1. il faut $[1/x, x] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc... puis exprimer G à l'aide d'une primitive quelconque de la fonction ; 2. ok

Ex. 5 : a) ok et calculer $u_{n+1} - u_n$ avec la linéarité puis positivité de f ; b) majorer u_n en "majorant" la fonction par t^n ; c) I.P.P. avec $u'(t) = t^n$.

Ex. 6 : $u'(x) = xe^{x^2}$; $u'(t) = t$; $u'(x) = \frac{1}{x^2}$; $u'(t) = 1$ deux fois.

Ex. 7 : I.P.P. dans I_n en primitivant $x \mapsto x$.

Ex. 8 : a) étudier $x \mapsto e^x - e^a - (x-a)e^a$; b) appliquer a) avec $x = f(t)$ et $a = \int_0^1 f$; utiliser le critère de nullité pour étudier le cas d'égalité.

Ex. 9 : ok

Ex. 10 : poser $u = \frac{\pi}{2} - x$.

Ex. 11 : 1. "majorer" la fonction par x^{2n} ; 2. majorer $|I_n - J_n|$ en utilisant $1 + x^n \geq 1$; 3. poser $u = 1 + x^n$; 4. majorer $\left| \frac{I_n}{J_n} - 1 \right|$ ou encadrer $\frac{I_n}{J_n}$ grâce à 2. et 3.

Ex. 12 : a) encadrer d'abord la fonction sur $[k, k+1]$ puis intégrer ; b) ajouter les inégalités obtenues en a) pour k variant de 1 à n ; en déduire un encadrement de u_n puis de $\frac{u_n}{\ln n}$. Conclure.

Ex. 13 : a) majorer l'intégrale en majorant $|f(t)|$ par la borne supérieure de $|f|$ sur $[0, 1]$; b) intégrer deux fois par parties puis appliquer a) à h'' .

Ex. 14 : appliquer le théorème sur les sommes de Riemann directement pour S_n , avec un changement d'indice pour T_n , après avoir pris le logarithme pour U_n et en découpant la somme V_n en deux.