TD n° 15 : Dérivation

Exercice 1

À l'aide du taux d'accroissement, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\mathrm{Arc}\tan(x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos(ax)-\cos(a)}{e^{-ax^2}-e^{-a}}$ $(a\in\mathbb{R}^*)$; c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$ (avec f dérivable en a).

Exercice 2

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\cos\left(\sqrt{|x|}\right)$.
Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer $f'(x)$ lorsqu'il existe.

b) Mêmes questions avec g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\ln\left(1+e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

Exercice 3

On pose $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

a) Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur $I=]-1;1[$.

b) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1-\left[f(x)\right]^2$.

c) Démontrer que g est dérivable sur I et calculer $g'(y)$ pour $y\in I$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Proposer une fonction du même type qui soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont de classe C^1 sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions là où elle existe.

1. $I=\mathbb{R}^+$ et $f : x\longmapsto \ln(1+\sqrt{x})$; 2. $I=\mathbb{R}^+$ et $f : x\longmapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$;

3. $I=]-\infty,1]$ et $f : x\longmapsto x\sqrt{1-x}$.

Exercice 6

1. Montrer que la restriction de la fonction sinus à $I=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, notée f, réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ lorsqu'il existe.

Exercice 7

Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a,b]$ $(a<b)$ et ayant $n+1$ zéros distincts sur $[a,b]$ i.e. s'annulant en $n+1$ points $(n\in\mathbb{N}^*)$.

a) Démontrer que f' admet au moins n zéros distincts sur $[a,b]$.

b) Démontrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c)=0$.

Exercice 8

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(a)}{f(b)}=\exp\left((a-b)\dfrac{f'(c)}{f(c)}\right)$.

Exercice 9

On définit la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et on considère les fonctions $f_n : x \longmapsto e^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n!}$
2. En déduire que : $\left|\dfrac{e_n}{e} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$ puis la limite de (e_n).
3. S'inspirer de la méthode précédente pour montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que : $f(0) = 0$ et f' soit croissante sur $]0, +\infty[$.

Montrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
2. Déterminer la limite éventuelle α de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et en déduire que : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.
4. Conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indications pour les exercices du TD n° 15

Ex. 1 : a) b) faire apparaître des quotients de taux d'accroissement ; c) faire apparaître les taux d'accroissement de f entre a et $a + h^2$ puis entre a et $a + h$.
Ex. 2 : a) b) traiter le cas $x = 0$ à l'aide de la limite du taux d'accroissement.
Ex. 3 : a) utiliser la continuité et la monotonie puis vérifier $f(\mathbb{R}) = I$; b) calcul ; c) utiliser le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque.
Ex. 4 : a) vérifier la continuité et la dérivabilité en 0, calculer $f'(x)$ et vérifier que f' n'a pas de limite en 0 ; b) chercher une fonction du type $x \longmapsto x^n \sin\dfrac{1}{x}$.
Ex. 5 : utiliser les th. d'opérations et le taux d'accroissement ou la limite de la dérivée.
Ex. 6 : 1. th. de bijection ; 2. th. de dérivation d'une fonction réciproque.
Ex. 7 : a) utiliser le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de f ; b) montrer par récurrence que $f^{(k)}$ admet au moins $n + 1 - k$ zéros ($k \leqslant n$).
Ex. 8 : appliquer le T.A.F. à $\ln(|f|)$ puis montrer que f est de signe constant pour se débarrasser des $|\ |$.
Ex. 9 : 1. simplifier $f_n'(x)$ au maximum avant de majorer ; 2. utiliser l'inégalité des A.F. sur $[0, 1]$; 3. utiliser le T.A.F. sur $[0, x]$ et les croissances comparées pour calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ puis conclure.
Ex. 10 : calculer $g'(x)$ puis appliquer le T.A.F. à f sur $[0, x]$.
Ex. 11 : 1. récurrence ; 2. $u_{n+1} = f(u_n)$ donc... ; 3. inégalité des A. F. puis récurrence ; 4. th. des gendarmes.