TD n° 14 : Continuité

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\, f(x) - f(y)\,| \leqslant k|\, x - y\,|$.
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) + f(x) = 0$.
a) Calculer $f(0)$.
b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = (-1)^n f(x)$.
c) Démontrer que f est la fonction nulle.

Exercice 3

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln(|x|^n)}{x^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
Montrer que f_n admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 4

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[f(x)\big]^2 = f(x)$.

Exercice 6

Montrer : $\forall x \in \,]1, e],\ \exists !\ y \in [e, +\infty[$ tel que $x^y = y^x$.
On pose $y = g(x)$. Montrer que $g :]1, e] \longrightarrow [e, +\infty[$ est strictement décroissante.
Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1^+ ?

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que g est continue. Qu'en est-il pour f ?

Exercice 8

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels 2 à 2 distincts dans l'intervalle $[0, 1]$. On définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$. Que représente $f_n(x)$?
Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe au moins un réel $u \in [0, 1]$ tel que : $f_n(u) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11

On suppose que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = a \in \mathbb{R}, \lim_{-\infty} f = b \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Indications pour les exercices du TD n° 14

Ex. 1 : traiter le cas $k = 0$ puis, pour $k \neq 0$, revenir à la définition avec (ε, α) pour montrer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou utiliser le théorème des "gendarmes".
Ex. 2 : a) faire $x = 0$; b) récurrence ; c) utiliser la continuité de f en 0 pour passer à la limite dans l'égalité du b).
Ex. 3 : étudier les limites de f en 0, en 1 puis en -1 en distinguant, pour ce dernier cas, les valeurs de n selon leur parité.
Ex. 4 : étudier la continuité en 0 en distinguant limite à droite et limite à gauche.
Ex. 5 : montrer que $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ puis conclure à l'aide de la continuité de f.
Ex. 6 : transformer l'équation en introduisant la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$; utiliser les restrictions de f à $]1, e]$ et $[e, +\infty[$.
Ex. 7 : g admet des limites à droite et à gauche en tout point $a > 0$, en déduire les limites à droite et à gauche de f en a puis conclure.
Ex. 8 : introduire la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ et regarder ses valeurs aux bornes de son domaine.
Ex. 9 : étudier $x \longmapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle prend des valeurs de signes contraires.
Ex. 10 : utiliser la positivité de f_n pour justifier que les 2 nombres $f_n(0)$ et $f_n(1)$ encadrent $\dfrac{1}{2}$.
Ex. 11 : utiliser la définition des limites avec par exemple $\varepsilon = 1$ pour montrer que f est bornée sur des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, puis utiliser la continuité sur un segment.

Indications pour les exercices du TD n° 14

Ex. 1 : traiter le cas $k = 0$ puis, pour $k \neq 0$, revenir à la définition avec (ε, α) pour montrer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou utiliser le théorème des "gendarmes".
Ex. 2 : a) faire $x = 0$; b) récurrence ; c) utiliser la continuité de f en 0 pour passer à la limite dans l'égalité du b).
Ex. 3 : étudier les limites de f en 0, en 1 puis en -1 en distinguant, pour ce dernier cas, les valeurs de n selon leur parité.
Ex. 4 : étudier la continuité en 0 en distinguant limite à droite et limite à gauche.
Ex. 5 : montrer que $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ puis conclure à l'aide de la continuité de f.
Ex. 6 : transformer l'équation en introduisant la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$; utiliser les restrictions de f à $]1, e]$ et $[e, +\infty[$.
Ex. 7 : g admet des limites à droite et à gauche en tout point $a > 0$, en déduire les limites à droite et à gauche de f en a puis conclure.
Ex. 8 : introduire la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ et regarder ses valeurs aux bornes de son domaine.
Ex. 9 : étudier $x \longmapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle prend des valeurs de signes contraires.
Ex. 10 : utiliser la positivité de f_n pour justifier que les 2 nombres $f_n(0)$ et $f_n(1)$ encadrent $\dfrac{1}{2}$.
Ex. 11 : utiliser la définition des limites avec par exemple $\varepsilon = 1$ pour montrer que f est bornée sur des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, puis utiliser la continuité sur un segment.