TD n° 13 : Limites

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

a) Montrer, à l'aide du taux d'accroissement, que f est strictement monotone.
b) f est-elle majorée ? minorée ?

Exercice 2

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$.
2. Retrouver alors le résultat vu en cours concernant $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

Exercice 3

Soit $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \times \sin(x) \end{array}$. f admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(x-\ln|2e^x-1|\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^2}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{1+x^2}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x-a}{x^{1/3}-a^{1/3}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, donner un équivalent “simple” de $f(x)$ au voisinage de 0, puis de $+\infty$:

a) $f(x) = 5x^3-2x^2-3$
b) $f(x) = e^x+\cos(x)+\sin^2(x)-2$
c) $f(x) = \sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}$
d) $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$
e) $f(x) = \ln|e^x-1|$

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\tan(x)\right)^{\cos(x)}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\ln(x))}{x}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x^2}$; g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x-1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$.

<u>Indications pour les exercices du TD n° 13</u>

Ex. 1 : a) calculer le taux d'accroissement et le factoriser au maximum et en déduire qu'il est strictement positif ; b) calculer les limites de f en -1^+ et -1^- puis conclure.
Ex. 2 : 1. se ramener à 0 et étudier les fonctions obtenues ; 2. encadrer la fonction grâce à 1. en distinguant $x > 0$ et $x < 0$.
Ex. 3 : en utilisant : $\forall a \in \mathbb{R},\ E(a) \leqslant a < E(a) + 1$, trouver un encadrement de $f(x)$ selon que $x > 0$ ou $x < 0$
Ex. 4 : a) quantité conjuguée puis factorisation ; b) mettre e^x en facteur dans le logarithme ; c) majorer par une fonction qui tend vers 0 ; d) calculer la limite des suites $(f(n\pi))_{n\geqslant 0}$ et $(f(n\pi + \frac{\pi}{2}))_{n\geqslant 0}$ et conclure ; e) faire le changement de variable $y = x-1$; f) idem ; g) factoriser $x-a = (x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3$; h) quantité conjuguée.
Ex. 5 : a) ok ; b) en 0, utiliser les équivalents usuels après avoir fait apparaître $e^x - 1$ et $\cos(x) - 1$ et en $+\infty$ mettre e^x en facteur ; c) en 0, utiliser $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ et en $+\infty$ mettre $\sqrt{x}$ en facteur puis utiliser un équivalent usuel ; d) en $+\infty$ utiliser $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ et en 0 réduire d'abord au même dénominateur ; e) en 0 utiliser $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et en $+\infty$ mettre e^x en facteur.

Ex. 6 : a) “passer” à l'exponentielle puis utiliser une limite connue ; b) chercher un équivalent simple ; c)“passer” à l'exponentielle puis trouver un équivalent simple de l'exposant et sa limite ; d) idem en écrivant $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$; e) $x \ln x \longrightarrow 0$ donc... ; f) chercher un équivalent simple du numérateur ; g) idem pour numérateur et dénominateur sans oublier que $x^2 - 1$ se factorise.

<u>Indications pour les exercices du TD n° 13</u>

Ex. 1 : a) calculer le taux d'accroissement et le factoriser au maximum et en déduire qu'il est strictement positif ; b) calculer les limites de f en -1^+ et -1^- puis conclure.
Ex. 2 : 1. se ramener à 0 et étudier les fonctions obtenues ; 2. encadrer la fonction grâce à 1. en distinguant $x > 0$ et $x < 0$.
Ex. 3 : en utilisant : $\forall a \in \mathbb{R},\ E(a) \leqslant a < E(a) + 1$, trouver un encadrement de $f(x)$ selon que $x > 0$ ou $x < 0$
Ex. 4 : a) quantité conjuguée puis factorisation ; b) mettre e^x en facteur dans le logarithme ; c) majorer par une fonction qui tend vers 0 ; d) calculer la limite des suites $(f(n\pi))_{n\geqslant 0}$ et $(f(n\pi + \frac{\pi}{2}))_{n\geqslant 0}$ et conclure ; e) faire le changement de variable $y = x-1$; f) idem ; g) factoriser $x-a = (x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3$; h) quantité conjuguée.
Ex. 5 : a) ok ; b) en 0, utiliser les équivalents usuels après avoir fait apparaître $e^x - 1$ et $\cos(x) - 1$ et en $+\infty$ mettre e^x en facteur ; c) en 0, utiliser $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ et en $+\infty$ mettre $\sqrt{x}$ en facteur puis utiliser un équivalent usuel ; d) en $+\infty$ utiliser $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ et en 0 réduire d'abord au même dénominateur ; e) en 0 utiliser $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et en $+\infty$ mettre e^x en facteur.

Ex. 6 : a) “passer” à l'exponentielle puis utiliser une limite connue ; b) chercher un équivalent simple ; c)“passer” à l'exponentielle puis trouver un équivalent simple de l'exposant et sa limite ; d) idem en écrivant $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$; e) $x \ln(x) \longrightarrow 0$ donc... ; f) chercher un équivalent simple du numérateur ; g) idem pour numérateur et dénominateur sans oublier que $x^2 - 1$ se factorise.