

TD n° 12 : Fonctions usuellesExercice 1

- a) Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $e^x \geq 1 + x$ .  
 b) Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .  
 c) En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

Exercice 2

Résoudre les équations, inéquations ou systèmes d'équations suivants :

- a)  $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$  ; b)  $\ln(x) - 2 + \frac{1}{\ln(x)} > 0$  ; c)  $9^x + 3^x - 12 = 0$  ; d)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases}$

Exercice 3

On considère les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Déterminer si  $f$  est injective, surjective, bijective.
- Montrer que  $g$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 4

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$  c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(x))^{x-1}$  d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ )

Exercice 5

- Résoudre dans  $\mathbb{R}^+$  les équations suivantes : a)  $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$  b)  $(x^2)^x = x^{x^2}$
- Pour quels réels  $a$  et  $b$  a-t-on l'égalité :  $a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$  ?
- Simplifier l'expression  $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$  en précisant le domaine de définition.

Exercice 6

Comparer, au voisinage de  $+\infty$ , pour  $1 < a < b$  :  $f(x) = a^{(b^x)}$  et  $g(x) = b^{(a^x)}$ .

Exercice 7

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- a)  $\cos(x) + \cos(3x) = 0$  b)  $\sin(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  c)  $\tan(x) \cdot \tan(4x) = -1$

Exercice 8

À l'aide des limites remarquables, calculer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(2x)}{x^2}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\tan(2x)}$ .

Exercice 9

Démontrer les égalités suivantes :

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\text{Arc tan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\text{Arc tan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

c)  $\forall x \in [0, \pi[, \quad \text{Arc tan}\left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}\right) = \frac{x}{2}$ .

Exercice 10

Montrer que :  $\forall x > 0, \quad \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$   
 $\forall x < 0, \quad \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ .

Exercice 11

Étudier et représenter graphiquement la fonction  $f : x \mapsto \text{Arc tan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2 \text{Arc tan}(x)$ .

## Indications pour les exercices du TD n° 12

Ex. 1 : a) étudier  $f(x) = e^x - 1 - x$ ; b) étudier  $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ ; c) minorer  $\frac{e^x}{x}$  grâce à b) puis faire le changement de variable  $y = \ln x$  pour calculer la 2<sup>ème</sup> limite.

Ex. 2 : a) utiliser les propriétés du logarithme pour se ramener à 2 équations du second degré; b) réduire au même dénominateur; c) faire le changement d'inconnue  $y = 3^x$ ; d) se débarrasser des logarithmes et substituer dans la 1<sup>ère</sup> équation.

Ex. 3 : 1. remarquer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$  et  $f(x) > 0$ ; 2. résoudre  $g(x) = y$  pour  $y \in \mathbb{R}$ .

Ex. 4 : a) poser  $y = 1/x$ ; b) se ramener à la limite du cours avec  $\sqrt{x} = x/\sqrt{x}$ ; c) "passer" à l'exponentielle et faire le changement  $y = \ln x$ ; d) mettre  $e^{bx}$  en facteur et se ramener à une limite connue.

Ex. 5 : 1. a) b) prendre le logarithme de chaque membre puis factoriser; 2. et 3. : utiliser l'exponentielle pour transformer les expressions.

Ex. 6 : faire le quotient et "passer" à l'exponentielle puis utiliser les limites de référence.

Ex. 7 : a) se ramener à  $\cos a = \cos b$ ; b) se ramener à  $\sin a = \sin b$ ; c) se ramener à  $\tan a = \tan b$  avec  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$  dans  $\tan x$ .

Ex. 8 : a) faire apparaître  $\sin x/x$ ; b)  $\sin(2x) = \dots$ ; c) mettre  $e^{-x}$  en facteur au numérateur

Ex. 9 : a) utiliser  $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2(a)}$ ; b) utiliser a) et  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ; c) exprimer  $\cos(x)$  à l'aide de  $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Ex. 10 : étudier la fonction  $x \mapsto \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$  sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$ .

Ex. 11 : déterminer  $D_f, D_{f'}$  puis calculer  $f'(x)$  en simplifiant au maximum et conclure.

## Indications pour les exercices du TD n° 12

Ex. 1 : a) étudier  $f(x) = e^x - 1 - x$ ; b) étudier  $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ ; c) minorer  $\frac{e^x}{x}$  grâce à b) puis faire le changement de variable  $y = \ln x$  pour calculer la 2<sup>ème</sup> limite.

Ex. 2 : a) utiliser les propriétés du logarithme pour se ramener à 2 équations du second degré; b) réduire au même dénominateur; c) faire le changement d'inconnue  $y = 3^x$ ; d) se débarrasser des logarithmes et substituer dans la 1<sup>ère</sup> équation.

Ex. 3 : 1. remarquer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$  et  $f(x) > 0$ ; 2. résoudre  $g(x) = y$  pour  $y \in \mathbb{R}$ .

Ex. 4 : a) poser  $y = 1/x$ ; b) se ramener à la limite du cours avec  $\sqrt{x} = x/\sqrt{x}$ ; c) "passer" à l'exponentielle et faire le changement  $y = \ln x$ ; d) mettre  $e^{bx}$  en facteur et se ramener à une limite connue.

Ex. 5 : 1. a) b) prendre le logarithme de chaque membre puis factoriser; 2. et 3. : utiliser l'exponentielle pour transformer les expressions.

Ex. 6 : faire le quotient et "passer" à l'exponentielle puis utiliser les limites de référence.

Ex. 7 : a) se ramener à  $\cos a = \cos b$ ; b) se ramener à  $\sin a = \sin b$ ; c) se ramener à  $\tan a = \tan b$  avec  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$  dans  $\tan x$ .

Ex. 8 : a) faire apparaître  $\sin x/x$ ; b)  $\sin(2x) = \dots$ ; c) mettre  $e^{-x}$  en facteur au numérateur

Ex. 9 : a) utiliser  $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2(a)}$ ; b) utiliser a) et  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ; c) exprimer  $\cos(x)$  à l'aide de  $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Ex. 10 : étudier la fonction  $x \mapsto \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$  sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$ .

Ex. 11 : déterminer  $D_f, D_{f'}$  puis calculer  $f'(x)$  en simplifiant au maximum et conclure.