TD n° 11 : Suites réelles (2)

Exercice 1

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n+1}{n(-1)^n+2}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
2. Si la suite (u_n) converge, que vaut sa limite ?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-1| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \lambda$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+1} = 3u_n^2 - 8u_n + 12$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

i) Dresser le tableau de variation de f.

ii) Résoudre l'équation $f(x) = x$ et préciser le signe de $f(x) - x$.

c) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lambda = 2$ ou $\lambda = \dfrac{2}{3}$?

d) Démontrer que, si λ est différent de 2 et de $\dfrac{2}{3}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

e) Démontrer que, si $\lambda \in \left]\dfrac{2}{3}; 2\right[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2. Que peut-on en conclure ?

f) Démontrer que, si $\lambda \notin \left[\dfrac{2}{3}; 2\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

Exercice 5

a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ $\qquad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en étudiant les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$.

Exercice 7

Étant donné $a \in [0,1]$, on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [0,2]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite ℓ.
3. Déterminer deux réels α et β tels que : $u_n = \ell + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, donner une suite « simple » équivalente à (u_n) :

a) $u_n = -n^3 + 3n - 8$ b) $u_n = \ln(n) - 2n$ c) $u_n = 3^n - 2^n + e^n$ d) $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) - \sin\left(\dfrac{2}{n}\right)$

Exercice 9

Étudier la nature de chacune des suites (u_n) suivantes et calculer sa limite éventuelle :

a) $u_n = \dfrac{n^3 - \sin(n)}{2^n + \cos(n)}$ b) $u_n = n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1\right)$ c) $u_n = n\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

d) $u_n = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{1 - \left(1 - \frac{3}{n}\right)^3}$ e) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}$ f) $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ $\quad (a \in \mathbb{R}^*)$

Indications pour les exercices du TD n° 11

Ex. 1 : trouver deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes.

Ex. 2 : 1. récurrence ; 2. $\ell = f(\ell)$... ; 3. utiliser la quantité conjuguée et l'encadrement de u_n ; 4. récurrence puis th. des gendarmes.

Ex. 3 : a) signe d'un trinôme ; b) ok ; c) calculer u_1 et conclure ; d) utiliser b)ii) pour trouver le signe de $f(u_n) - u_n$; e) récurrence ; f) dans les deux cas $\lambda > 2$ et $\lambda < 2/3$, raisonner par l'absurde et en déduire que la suite n'est pas majorée et diverge.

Ex. 4 : 1. appliquer la définition de $\lfloor x \rfloor$ puis multiplier par n et conclure ; 2. utiliser la définition de $\lfloor nx \rfloor$ pour l'encadrer.

Ex. 5 : a) faire deux études de fonctions ; b) encadrer $v_n = \ln u_n$ en utilisant a) puis en déduire les limites de (v_n) et (u_n).

Ex. 6 : montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes et conclure.

Ex. 7 : 1. récurrence ; 2. encadrer u_n grâce à 1. et conclure ; 3. déterminer un équivalent de $u_n - 1$, puis de $u_n - 1 - \dfrac{1}{n}$ et conclure.

Ex. 8 : a)b)c) ok ; d) utiliser l'équivalent usuel de $\ln(1 + u_n)$ et $\sin(u_n)$.

Ex. 9 : a) mettre en facteur les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur ; b) ok ; c) prendre l'équivalent usuel de $\ln(1 + u_n)$; d) utiliser les équivalents usuels ; e) mettre n^2 en facteur au numérateur et n au dénominateur ; f) "passer" à l'exponentielle.

Indications pour les exercices du TD n° 11

Ex. 1 : trouver deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes.

Ex. 2 : 1. récurrence ; 2. $\ell = f(\ell)$... ; 3. utiliser la quantité conjuguée et l'encadrement de u_n ; 4. récurrence puis th. des gendarmes.

Ex. 3 : a) signe d'un trinôme ; b) ok ; c) calculer u_1 et conclure ; d) utiliser b)ii) pour trouver le signe de $f(u_n) - u_n$; e) récurrence ; f) dans les deux cas $\lambda > 2$ et $\lambda < 2/3$, raisonner par l'absurde et en déduire que la suite n'est pas majorée et diverge.

Ex. 4 : 1. appliquer la définition de $\lfloor x \rfloor$ puis multiplier par n et conclure ; 2. utiliser la définition de $\lfloor nx \rfloor$ pour l'encadrer.

Ex. 5 : a) faire deux études de fonctions ; b) encadrer $v_n = \ln u_n$ en utilisant a) puis en déduire les limites de (v_n) et (u_n).

Ex. 6 : montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes et conclure.

Ex. 7 : 1. récurrence ; 2. encadrer u_n grâce à 1. et conclure ; 3. déterminer un équivalent de $u_n - 1$, puis de $u_n - 1 - \dfrac{1}{n}$ et conclure.

Ex. 8 : a)b)c) ok ; d) utiliser l'équivalent usuel de $\ln(1 + u_n)$ et $\sin(u_n)$.

Ex. 9 : a) mettre en facteur les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur ; b) ok ; c) prendre l'équivalent usuel de $\ln(1 + u_n)$; d) utiliser les équivalents usuels ; e) mettre n^2 en facteur au numérateur et n au dénominateur ; f) "passer" à l'exponentielle.