TD n° 10 : Suites réelles (1)

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique telle que :

$$u_0 + u_1 = -1 \quad \text{et} \quad u_0 \times u_2 = 1.$$

a) Déterminer le premier terme u_0 et la raison q de cette suite.
b) Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite.
c) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n u_n$ est-elle arithmétique ?
d) Peut-on trouver une suite géométrique qui soit aussi arithmétique ?

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{2}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
a) Exprimer u_n en fonction de u_0 et n.
b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de u_0.

Exercice 3

Soit k un nombre réel non nul.
Soit E_0 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
Soit E_k l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + k$.
a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(an^2)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à E_k. Dans la suite, on donne à a la valeur ainsi déterminée.
b) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_k \iff (u_n - an^2)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$.
c) Trouver toutes les suites appartenant à E_k.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

a) $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} \cdot u_n} \end{cases}$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{2n^2}{3(n^2-1)} u_{n-1} \end{cases}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{n+1}{n} u_n$ est géométrique.
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Exercice 6

Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 réels quelconques et : $\forall n \in \mathbb{N},$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{v_n - u_n}{2n+2} \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{v_n - u_n}{2n+2} \end{cases}$

Exercice 7

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,2] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in [\sqrt{3}, 2]$ puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Indications pour les exercices du TD n° 10

Ex. 1 : a) $u_0 \times u_2 = u_1^2$; b) cf. cours ; c) calculer $v_{n+1} - v_n$; d) écrire les conditions et déterminer la raison d'une telle suite.
Ex. 2 : a) suite arithmético-géométrique (cf. cours) ; b) étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Ex. 3 : a) utiliser la définition de E_k ; b) idem en utilisant a) ; c) déterminer les éléments de E_0 puis utiliser b) pour conclure.
Ex. 4 : a) cf. cours ; b) considérer $(\ln u_n)_n$ après avoir justifié que $u_n > 0$.
Ex. 5 : a) ok ; b) déterminer d'abord v_n.
Ex. 6 : montrer que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante puis que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et conclure.
Ex. 7 : a) étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ grâce à la quantité conjuguée après avoir montré que $\sqrt{3} \leqslant u_n \leqslant 2$; b) th. de convergence des suites monotones et $\ell = f(\ell)$.

Indications pour les exercices du TD n° 10

Ex. 1 : a) $u_0 \times u_2 = u_1^2$; b) cf. cours ; c) calculer $v_{n+1} - v_n$; d) écrire les conditions et déterminer la raison d'une telle suite.
Ex. 2 : a) suite arithmético-géométrique (cf. cours) ; b) étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Ex. 3 : a) utiliser la définition de E_k ; b) idem en utilisant a) ; c) déterminer les éléments de E_0 puis utiliser b) pour conclure.
Ex. 4 : a) cf. cours ; b) considérer $(\ln u_n)_n$ après avoir justifié que $u_n > 0$.
Ex. 5 : a) ok ; b) déterminer d'abord v_n.
Ex. 6 : montrer que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante puis que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et conclure.
Ex. 7 : a) étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ grâce à la quantité conjuguée après avoir montré que $\sqrt{3} \leqslant u_n \leqslant 2$; b) th. de convergence des suites monotones et $\ell = f(\ell)$.