Soutien n° 9 : Suites réelles (2)

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

1. En étudiant f, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $a \in]2, 3[$.

2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2, v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n),\ v_{n+1} = v_n \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \leqslant 0$$
$$u_{n+1} = u_n,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0.$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a \leqslant v_n$.

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite est a.

c) À partir de quelle valeur de n, u_n est-il une valeur approchée de a à 10^{-2} près ?

Exercice 2

1. En étudiant $f : x \longmapsto \ln(1 + x) - x$ et $g : x \longmapsto \ln(1 + x) - \dfrac{x}{1 + x}$ sur $] - 1, +\infty[$, montrer que les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n + 1)$ sont adjacentes et convergent vers un réel γ appelé constante d'Euler.

2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 3

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2}. \end{cases}$

Exercice 4

Soit $a \in]0, +\infty[$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

Justifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis v_n en fonction de n et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 5

On pose : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n + 1}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 6

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n dans les cas suivants :

a) $u_n = n^2 \ln\Big(\dfrac{2n}{2n + 1}\Big)$

b) $u_n = \dfrac{\ln\left(\sqrt{n^2 + 1}\right)}{\ln(n)}$

c) $u_n = n\Big(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \ln\Big(e + \dfrac{1}{n}\Big)\Big)$

d) $u_n = \dfrac{(n^3 + 2)^{1/3} - n}{\sin\Big(\frac{n}{n^2+1}\Big)}$

Exercice 7

Déterminer un équivalent "simple" de u_n dans chacun des cas suivants :

$u_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}\,;\quad u_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right);\quad u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$