

**Soutien n° 9 : Suites réelles (2)****Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ .

- En étudiant  $f$ , montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $a \in ]2, 3[$ .
- On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $u_0 = 2, v_0 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), \quad v_{n+1} = v_n \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \leq 0$$

$$u_{n+1} = u_n, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0.$$

- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \leq v_n$ .
- Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes et que leur limite est  $a$ .
- À partir de quelle valeur de  $n$ ,  $u_n$  est-il une valeur approchée de  $a$  à  $10^{-2}$  près ?

**Exercice 2**

- En étudiant  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$  et  $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$  sur  $] -1, +\infty[$ , montrer que les suites définies par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$  et  $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$  sont adjacentes et convergent vers un réel  $\gamma$  appelé constante d'Euler.

- En déduire un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Exercice 3**

Étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2} \end{cases}$ .

**Exercice 4**

Soit  $a \in ]0, +\infty[$ , on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = a$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ .

Justifier que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie, exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  puis  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

**Exercice 5**

On pose :  $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ .

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes. En déduire un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

**Exercice 6**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général  $u_n$  dans les cas suivants :

- $u_n = n^2 \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$
- $u_n = \frac{\ln(\sqrt{n^2+1})}{\ln(n)}$
- $u_n = n \left( \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(e + \frac{1}{n}\right) \right)$
- $u_n = \frac{(n^3+2)^{1/3} - n}{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}$

**Exercice 7**

Déterminer un équivalent "simple" de  $u_n$  dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}; \quad u_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right); \quad u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$