Soutien n° 8 : Suites réelles (1)

Exercice 1

1. Vrai ou faux ? Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow 2x \leqslant 4y$.
2. Soit $1 \leqslant a \leqslant 3$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$. A-t-on : a) $1 \leqslant a - b \leqslant 2$? ; b) $0 \leqslant a - b \leqslant 2$? ; c) $0 \leqslant a - b \leqslant 3$?
3. Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.
4. Trouver les réels tels que : $|x - 4| \leqslant 2$.
5. Soient a, b, c des réels avec $a \neq -b, -2 \leqslant a \leqslant 1, -1 \leqslant b \leqslant 3$ et $-3 \leqslant c \leqslant 2$.
   Donner un encadrement de $a - b, \dfrac{1}{a + b}, c^2(a - b)$.
6. a) Montrer que si x et y sont deux réels positifs alors $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.
   b) Montrer que si x et y sont deux réels négatifs, alors $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor \geqslant \lfloor xy \rfloor$.
   c) Est-il vrai que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? Sinon quelle relation peut-on écrire ?

Exercice 2

1. Vrai ou faux ? Si une suite est croissante, alors elle est minorée.
2. Vrai ou faux ? Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
3. Vrai ou faux ? Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont majorées, alors : a) $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, b) $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, c) $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
4. Les suites définies par les relations suivantes sont-elles des suites classiques ? Si oui, préciser.
   a) $u_{n+1} = 3 + 2n$; b) $u_n = 2u_{n+1}$; c) $u_{n+1} = (n + 1)u_n$; d) $u_n = 3^{n+2}$.

Exercice 3

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.
   Étudier la nature de (u_n) en s'intéressant d'abord à la suite (u_n^2).
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.
   Étudier la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n - 1)$ et en déduire la nature de (u_n).

Exercice 4

Après avoir vérifié que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, étudier sa monotonie dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 - \sqrt{u_n} \end{cases}$

Exercice 5

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. À l'aide de l'inégalité : $\forall x > -1,\ \ln(1 + x) \leqslant x$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \ln(2)$.

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par u_0 et v_0 nombres réels strictement positifs donnés et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n \sqrt{v_n}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{v_n \sqrt{u_n}}.$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $v_n > 0$. On pose alors : $a_n = \ln(u_n)$ et $b_n = \ln(v_n)$.

b) En étudiant les suites $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donner la nature des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que leurs limites éventuelles.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n puis étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$
d) $\begin{cases} u_0 = -2,\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Exercice 8

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Vérifier que cette suite est bien définie, puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 - x_{n-1}^2 \geqslant 2$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \sqrt{2n+1}$ et la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \leqslant \sqrt{2n-1} + 1$ et en déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

Exercice 9

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$ pour $n \geqslant 1$.

Donner un encadrement de u_n ; en déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Exercice 10

Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.