Soutien n° 7 : Nombres complexes

Exercice 1

Mettre les nombres suivants sous forme algébrique : $z_1 = (3+2i)(5+i) - (2-i)(1+i)$; $z_2 = \dfrac{1}{1+i} - 1$; $z_3 = \dfrac{(2+i)^2}{1-3i}$.

Exercice 2

Déterminer le module et un argument des complexes : $z_1 = -2; z_2 = \sqrt{3} - i; z_3 = (\sqrt{3} - i)^3$.

Exercice 3

Déterminer les nombres complexes z tels que $z,\ z-1$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 4

Montrer que l'équation $z^3 + (3-3i)z^2 + (2-9i)z - 6 - 8i = 0$ admet une seule solution imaginaire pure.

Exercice 5

Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 puis u^4.
2. En déduire le module et un argument de u.
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 6

1. Déterminer sous forme algébrique les solutions de $z^2 = \sqrt{3} + i$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 7

Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; mettre sous forme exponentielle : $x = -2j,\ y = (1+j)^9$ et $z = \left(\dfrac{j}{j^2+1}\right)^{2025}$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = -4$
b) $z^2 + z + 2 = 0$
c) $z^3 = -\bar{z}$
d) $z^2 + \bar{z} + 1 = 0$

Exercice 9

Établir les formules de trigonométrie : $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x). \end{cases}$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ et w un nombre complexe tel que $w^n = 1$ et $w \neq 1$.

Après avoir simplifié $(1-w)S$, déterminer la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kw^{k-1}$.

Exercice 11

On considère les deux sommes $S = \cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{11}\right)$ et $T = \sin\left(\dfrac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{7\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{9\pi}{11}\right)$.

Calculer $S + iT$ puis en déduire S et T.