Soutien n° 6 : Applications linéaires et Matrices (2)

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
En examinant les colonnes de M, déterminer rapidement le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ u_2 = e_1 - e_2,\ u_3 = e_1 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans cette base et en déduire simplement une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ? Montrer que si $y \in \mathrm{Im}(f),\ f(y) = y$.
b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
c) En réunissant des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$, donner une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.
d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n$ et A'^n sont semblables. Calculer A'^n et en déduire A^n.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que : $A = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{t}} A) = 0$.

Exercice 5

Pour A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Tr}\, B = 0$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation :

$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B.$$