

Soutien n° 5 : Applications linéaires et Matrices (1)**Exercice 1**

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$; $(x, y) \mapsto (x + y, 0, 0)$.
- c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x, y, 1)$.

Exercice 2

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + 2t, y - z + t, x - y + 3z)$

- a) Déterminer le rang de f et une base de $\text{Im } f$.
 b) Déterminer $\text{Ker } f$ et en donner une base.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, x + 2y + z, 2x + y + z)$.

- a) Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
 b) Déterminer $\text{Ker } f$.
 c) Montrer que f est surjective. En déduire $\text{Im } f$.
 d) Que dire de f ?

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f((1, 0, 0)) = (1, 0, 0)$, $f((0, 1, 0)) = (-1, 1, 0)$ et $f((0, 1, 1)) = (0, 1, 0)$.
 Déterminer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis trouver le noyau et l'image de f .
 Que peut-on en déduire pour f ?

Exercice 5

- a) Montrer que les applications f et g de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définies par : $f((x, y, z)) = (0, z, y)$ et $g((x, y, z)) = (0, z + y, z + 2y)$ sont linéaires et ont mêmes noyaux et mêmes images.
 b) Trouver deux endomorphismes φ et ψ de \mathbb{R}^3 tels que : $f = g \circ \varphi$ et $f = \psi \circ g$.

Exercice 6

Peut-on trouver $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f = 0$ et $\text{rg}(f) = 2$?

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\text{Ker}(\lambda f)$ et $\text{rg}(\lambda f)$ en fonction de $\text{Ker } f$ et $\text{rg}(f)$.