Soutien n° 5 : Applications linéaires et Matrices (1)

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, x+y). \end{array}$; b) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 0, 0). \end{array}$

c) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,1). \end{array}$

Exercice 2

Soit l'application linéaire $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z+2t, y-z+t, x-y+3z) \end{array}.$

a) Déterminer le rang de f et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.

Exercice 3

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+2z, x+2y+z, 2x+y+z). \end{array}$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

c) Montrer que f est surjective. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

d) Que dire de f ?

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f((1,0,0)) = (1,0,0)$, $f((0,1,0)) = (-1,1,0)$ et $f((0,1,1)) = (0,1,0)$. Déterminer $f((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, puis trouver le noyau et l'image de f. Que peut-on en déduire pour f ?

Exercice 5

a) Montrer que les applications f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par : $f((x,y,z)) = (0,z,y)$ et $g((x,y,z)) = (0, z+y, z+2y)$ sont linéaires et ont mêmes noyaux et mêmes images.

b) Trouver deux endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^3$ tels que : $f = g \circ \varphi$ et $f = \psi \circ g$.

Exercice 6

Peut-on trouver $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$?

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\mathrm{Ker}(\lambda f)$ et $\mathrm{rg}(\lambda f)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.