Soutien n° 4 : Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Préciser n.

a) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
b) $F = \{(a, a^2, 5a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
c) $G = \{(a, b, a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
d) $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - 3b - c = 0\}$
e) $I = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b + c = 0 \text{ et } b - 2d = 0\}$
f) $J = \{(a, a + 1, a + 2) \mid a \in \mathbb{R}\}$
g) $K = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}$

Exercice 2

1. Soient $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. A-t-on $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathbb{R}^3$? Sinon, déterminer une base de $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.
2. Montrer que $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (2, 1, 3), v_2 = (1, 3, 2), v_3 = (5, -5, 6)$ et on pose : $E = \text{Vect}\{v_1, v_2\},\ F = \text{Vect}\{v_3\}$.
1. Montrer que $F \subset E$ mais que $F \neq E$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Montrer que G est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap G$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $x_1 = (1, 2, -1, 2),\ x_2 = (2, 3, 0, -1),\ x_3 = (1, 2, 1, 4)$ et $x_4 = (1, 3, -1, 0)$.
a) Montrer que (x_1, x_2, x_3, x_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Peut-on exprimer x_4 comme combinaison linéaire de x_1, x_2 et x_3 ?
c) Quelles sont les coordonnées de $u = (1, 1, 1, 1)$ dans la base (x_1, x_2, x_3, x_4) ?

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang de la famille de vecteurs (u, v, w, t) où $u = (1, 0, 1, 0)$,
$v = (0, 2, 0, 2),\ w = (1, 2, 3, 4)$ et $t = (-1, -3, 2, 4)$.

Exercice 6

Dans les deux cas suivants, déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_i :
a) $v_1 = (2, 1, 3, 1),\ v_2 = (1, 2, 0, 1),\ v_3 = (-1, 1, -3, 0)$
b) $v_1 = (2, 1, 3, -1),\ v_2 = (-1, 1, -3, 1),\ v_3 = (4, 5, 3, -1),\ v_4 = (1, 5, -3, 1)$

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose : $a = (1, 2, 3, 4),\ b = (1, 1, 1, 3),\ c = (2, 1, 1, 3),\ d = (-1, 0, -1, 2)$ et $e = (2, 3, 0, 1)$. Soit $U = \text{Vect}\{a, b, c\}$ et $V = \text{Vect}\{d, e\}$.
Déterminer les dimensions de $U, V, U \cap V$.

Exercice 8

Soit $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n - 1$ et en déterminer une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$.
2. Soit $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
3. Lorsque $v = (1, \dots, 1)$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et donner les coordonnées d'un vecteur $u = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{B}$.