Soutien n° 3 : Matrices et Systèmes linéaires (2)

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S)\begin{cases} 2x+y+z &= 5\\ 2x+13y-7z &= -1\\ x-y+z &= 1\end{cases} \qquad (S')\begin{cases} 3x-4y+2z+t &= 1\\ y+z-t &= 0\\ -3x+6y-3t &= 0\end{cases}$$

Exercice 2

Montrer qu'il existe un triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\},\ \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}.$$

Exercice 3

Résoudre et discuter les systèmes d'équations linéaires suivant les valeurs du paramètre réel a :

$$(S)\begin{cases} ax+3y &= 1\\ x+(a-2)y &= -1\end{cases} \qquad (S')\begin{cases} (1+a^2)x-3y &= 5\\ 4y+3z &= 8\\ az &= 4\end{cases} \qquad (S'')\begin{cases} ax+y+z &= a^2\\ x-ay-az &= a\\ x-y-az &= 1\end{cases}$$

Exercice 4

a) La matrice $A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer l'inverse.

b) Même question avec $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$.

c) Même question avec $C=\begin{pmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$ où $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 5

Déterminer l'inverse de la matrice $M=(m_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ m_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i\leqslant j\\ 0 \text{ si } i>j\end{cases}.$$

Exercice 6

1. Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$ la matrice $A_m=\begin{pmatrix}m&1\\2&m+1\end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

2. Résoudre, en fonction des valeurs de m, le système $(S)\begin{cases} mx+y &= m+4\\ 2x+(m+1)y &= -2m-6\end{cases}$.