Soutien n° 2 : Matrices et Systèmes linéaires (1)

Exercice 1

Calculer tous les produits possibles à l'aide des matrices suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire ${}^{\mathrm{t}}A$ et ${}^{\mathrm{t}}B$, puis calculer $A \cdot {}^{\mathrm{t}}B,\ B \cdot {}^{\mathrm{t}}A,\ A \cdot {}^{\mathrm{t}}A,\ B \cdot {}^{\mathrm{t}}B,\ {}^{\mathrm{t}}A \cdot B,\ {}^{\mathrm{t}}B \cdot A,\ {}^{\mathrm{t}}A \cdot A$ et ${}^{\mathrm{t}}B \cdot B$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la forme générale des matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $b \times c \neq 0$.

a) Calculer M^2. À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d peut-on trouver un réel λ tel que : $M^2 = \lambda M$?
b) Donner un exemple de matrice M vérifiant cette condition.
c) Sous les conditions du a), calculer M^3 et M^4 en fonction de M et λ et en déduire l'expression de M^n en fonction de $M, \lambda, n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 5

Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer ${}^{\mathrm{t}}S$ et comparer à S.
b) Soit $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $u \cdot S$ et $S \cdot {}^{\mathrm{t}}u$. Que remarque-t-on ? À quoi est-ce dû ?
c) Calculer S^2 et S^3. Ces matrices sont-elles symétriques ? Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S^n$ est symétrique.
d) Le produit de deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-il une matrice symétrique ?

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculer AB. A est-elle inversible ? Déterminer $M = BA$ puis M^2.

Exercice 7

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ et $I = I_3$.

1) Calculer $(A + I)(2I - A)$. En déduire que A est inversible.
2) On pose $B = \dfrac{1}{3}(A + I)$, $C = \dfrac{1}{3}(2I - A)$.
Calculer $B + C$ et $2B - C$, puis montrer que : $B^2 = B$ et $C^2 = C$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $A^n = 2^n B + (-1)^n C$ et expliciter A^n.

Exercice 8

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^k = 0$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer sa matrice inverse.

Exercice 9

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $A^3 + 2A^2 + A + \alpha I_n = 0$ et $A^2 + 2A + I_n \neq 0$.
Montrer que A est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$.