Soutien n° 1 : Ensembles - Applications - Récurrence - Sommes

Exercice 1

1. Compléter chaque phrase avec “il faut”, “il suffit” ou “il faut et il suffit”.
   a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m^2 = n$, il ...... que n soit positif ou nul.
   b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $t^2 = x$, il ...... que x soit positif ou nul.
2. Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E. Montrer que : $A \subset B \iff A = A \cap B \iff A \cup B = B$.
3. *Vrai ou Faux ?* Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, alors f est bijective. Si c'est vrai, que vaut f^{-1} ?
4. Soient $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \exp(x)$. Peut-on écrire $f \circ g$? $g \circ f$? Si oui, décrire ces applications.
5. Écrire toutes les applications de $E = \{1; 2\}$ dans $F = \{a; b\}$ (avec $a \neq b$) et, pour chacune, indiquer si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 2

1. Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant -1 \Longrightarrow (1+x)^n \geqslant 1+nx$.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes $u_0 = 4$ et $u_1 = 8$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.

Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2\times(-1)^n + 2\times 5^n$.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k-1)$; $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)$ (changer d'indice) ; $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$; $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^{k-1}}{4^k}$, $S_5 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$; $S_6 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (nk-1)$; $S_7 = \displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} k2^{k-1}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$ de deux manières différentes et en déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
2. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)$ et $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} (i+j)$.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j b^{k-j}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} 2^{2i+1}\binom{2n}{i-1}$.