L. Sup. B/L Septembre 2025

# Soutien n° 1 : Ensembles - Applications - Récurrence - Sommes

## Exercice 1

- 1. Compléter chaque phrase avec "il faut", "il suffit" ou "il faut et il suffit".
  - a) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour qu'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $m^2 = n$ , il ..... que n soit positif ou nul.
  - b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $t^2 = x$ , il ..... que x soit positif ou nul.
- 2. Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E. Montrer que :  $A \subset B \iff A = A \cap B \iff A \cup B = B$ .
- 3. Vrai ou Faux? Soit  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ , alors f est bijective. Si c'est vrai, que vaut  $f^{-1}$ ?
- 4. Soient  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  et  $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g(x) = \exp(x)$ . Peut-on écrire  $f \circ g$ ?  $g \circ f$ ? Si oui, décrire ces applications.
- 5. Écrire toutes les applications de  $E = \{1; 2\}$  dans  $F = \{a; b\}$  (avec  $a \neq b$ ) et, pour chacune, indiquer si elle est injective, surjective, bijective.

#### Exercice 2

- 1. Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x \geqslant -1 \Longrightarrow (1+x)^n \geqslant 1+nx$ .
- 2. Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 \leqslant n^3$ .
- 3. Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$

#### Exercice 3

Soit  $(u_n)$  la suite définie par ses deux premiers termes  $u_0=4$  et  $u_1=8$  et par la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2}=4u_{n+1}+5u_n$ .

Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$ .

### Exercice 4

Calculer les sommes suivantes : 
$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (2k-1)$$
;  $S_2 = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$  (changer d'indice);  $S_3 = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ ;

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^{k-1}}{4^k} , S_5 = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right); S_6 = \sum_{k=1}^n (nk-1); S_7 = \sum_{k=3}^{n+1} k2^{k-1} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

## Exercice 5

1. Soit 
$$n \in \mathbb{N}^*$$
; calculer  $\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3]$  de deux manières différentes et en déduire  $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ .

2. Calculer 
$$T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$$
 et  $U_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (i+j)$ .

## Exercice 6

1. Soit 
$$n \in \mathbb{N}^*$$
; calculer  $T_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$  où  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Soit 
$$n \in \mathbb{N}^*$$
; calculer  $S_n = \sum_{i=1}^{2n} 2^{2i+1} {2n \choose i-1}$ .