Soutien n° 12 : Dérivation

Exercice 1

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes : $f : x \longmapsto |\sin(x)|$, $g : x \longmapsto x|\sin(x)|$ et $h : x \longmapsto \sqrt{|\sin(x)|}$.

Exercice 2

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée là où elle existe :
a) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)^5$; b) $g(x) = x\ln(1 + x^2)$; c) $h(x) = \tan(2x) + \dfrac{1}{\tan(x)}$;
d) $i(x) = \sqrt{1 + \ln(x)}$; e) $j(x) = e^{1-\sqrt{x}}$; f) $k(x) = (\sqrt{x} + 1)^{\ln(x)}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.
a) Étudier la dérivabilité de f.
b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ sur un intervalle I à préciser.
c) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur I.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x$.
1. Montrer que f admet une fonction réciproque g.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer g' en fonction de g.
3. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{1 + |x|}$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + x$ si $x \geqslant 0$; $f(x) = e^x$ si $x < 0$.
Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$
Quel est le plus grand entier k tel que f soit de classe C^k sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8

Montrer, à l'aide des A. F., que : $\forall (x, y) \in [3, +\infty[^2,\ \left|\sqrt{6 + x} - \sqrt{6 + y}\right| \leqslant \dfrac{1}{6}|x - y|$.

Exercice 9

On rappelle qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* s'il existe un réel positif K tel que :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

1. Montrer qu'une fonction dérivable est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.
2. Montrer que si f et g sont lipschitziennes, alors $f + g$ est lipschitzienne.
3. Montrer que si f et g sont lipschitziennes, alors $f \circ g$ est lipschitzienne.
4. Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées est une fonction lipschitzienne.
5. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Exercice 10

Étude de la fonction $f : x \longmapsto |x \ln |x||$: domaine, parité, limites, variations, branches infinies.