Soutien n° 11 : Limites - Continuité

Exercice 1 :

Étudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^7+4x+1}{3x^7+x^9+3}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ d) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{|\,x\,|-2}{x^2-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

Exercice 2 :

Déterminer un équivalent “simple” en a de la fonction f donnée :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sin^2(x)}$ avec $a=0$; b) $f(x)=\dfrac{(\cos(x)+1)^2}{(\cos(x)-1)^2}$ avec $a=0$

c) $f(x)=\ln(3x^2-x+\sqrt{x})$; $a=0$ puis $a=+\infty$

Exercice 3 :

1. Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions suivantes : a) $f(x)=x^a$ et $g(x)=a^x$ avec $a>1$;
b) $f(x)=x^{\ln(x)}$ et $g(x)=(\ln(x))^x$; c) $f(x)=(x^x)^x$ et $g(x)=x^{x^x}$.
2. Comparer au voisinage de 0 les fonctions suivantes : a) $f(x)=(e^x-1)^2$ et $g(x)=x\sin(x)$;
b) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $g(x)=x^3$; c) $f(x)=\ln(x)\ln(1+x)$ et $g(x)=\ln^2(x)\sin^2(x)$.

Exercice 4 :

On note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière du réel x.

1. Montrer que $\lfloor x\rfloor \underset{+\infty}{\sim} x$. A-t-on $e^{\lfloor x\rfloor} \underset{+\infty}{\sim} e^x$?
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right)=0$. En déduire que : $e^{\sqrt{\lfloor x\rfloor}} \underset{+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=3x+\dfrac{|\,2x\,|}{x}$ et $f(0)=2$.

Étudier la continuité de f en 0 et donner une représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Exercice 6 :

1. Déterminer un prolongement par continuité en $x_0=1$ de la fonction $f\ :\ x\longmapsto \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x)=\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Étudier la continuité de h sur $\mathbb{R}^*$. Peut-on prolonger h par continuité en 0 ?

Exercice 7 :

Soit $p\in]0,1[$ et $q=1-p$. Montrer que l'équation : $x^2-qx-pq=0$ d'inconnue x admet deux racines réelles distinctes, notées r et s, vérifiant : $-1<r<0<s<1$.

Exercice 8 :

Montrer que l'équation $e^{-x^2}=x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 9 :

Pour $\lambda\in\mathbb{R}^+$, on pose $P_\lambda(x)=x^3+\lambda x-1$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^+$, la fonction P_λ a une unique racine réelle notée $u(\lambda)$.
2. Montrer que la fonction $\lambda\longmapsto u(\lambda)$ est monotone et continue sur $\mathbb{R}^+$, puis déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.