

Soutien n° 10 : Fonctions usuellesExercice 1

a) Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

- (1) $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$
- (2) $2 \ln(x - 4) = \ln(x) - 2 \ln(2)$
- (3) $|\ln(x) + 2| + 2 + 2 \ln(x) = \ln^2(x)$
- (4) $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$

b) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système : $(S) \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

c) Résoudre dans \mathbb{R} : $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln(2)$.

d) Montrer que : $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \ln(\sqrt{1 + x^2} - x) = 0$ en précisant sur quelle partie \mathcal{D} de \mathbb{R} l'égalité est vraie.

Exercice 2

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{3x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{x^{1/x} - 1}{\ln(x)}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
- e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 e^{-x} - x)$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x) + x}{\ln(x) + 1}$
- g) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 1}$
- h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x))$.

Exercice 3

Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont exactes ?

$$(a^b)^c = a^{bc} ; a^b a^c = a^{bc} ; a^{2b} = (a^b)^2 ; (ab)^c = a^{c/2} b^{c/2} ; (a^b)^c = a^{(b^c)} ; (a^b)^c = (a^c)^b.$$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- a) $\sin(3x) - \sin(2x) = 0$
- b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)$
- c) $\tan(x) + \tan(2x) = 0$

Exercice 5

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 6

Simplifier les expressions $\cos(4 \operatorname{Arc} \tan(x))$ et $\tan(2 \operatorname{Arc} \tan(x))$ après avoir précisé sur quel(s) ensemble(s) elles ont un sens.

Exercice 7

- a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{Arc} \tan(1 + x) - \operatorname{Arc} \tan(x) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1 + x + x^2}\right)$.
- b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1 + k + k^2}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \operatorname{Arc} \tan(x) > \frac{x}{1 + x^2}$.

Exercice 9

Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], x \geq \operatorname{Arc} \tan(x) \geq \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan(2x)$.