Soutien n° 10 : Fonctions usuelles

Exercice 1

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

(1) $\sqrt{|x^2-1|} = x-5$
(2) $2\ln(x-4) = \ln(x) - 2\ln(2)$
(3) $|\ln(x)+2| + 2 + 2\ln(x) = \ln^2(x)$
(4) $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S) \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln(2)$.

d) Montrer que : $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2}-x) = 0$ en précisant sur quelle partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ l'égalité est vraie.

Exercice 2

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \cdot \frac{x^{1/x}-1}{\ln(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$ e) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} (x^3 e^{-x} - x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)+x}{\ln(x)+1}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}-1}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tan(x)\ln(\sin(x))$.

Exercice 3

Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont exactes ?

$(a^b)^c = a^{bc}$; $a^b\, a^c = a^{bc}$; $a^{2b} = (a^b)^2$; $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$; $(a^b)^c = a^{(b^c)}$; $(a^b)^c = (a^c)^b$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin(3x) - \sin(2x) = 0$
b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)$
c) $\tan(x) + \tan(2x) = 0$

Exercice 5

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 6

Simplifier les expressions $\cos(4\operatorname{Arc}\tan(x))$ et $\tan(2\operatorname{Arc}\tan(x))$ après avoir précisé sur quel(s) ensemble(s) elles ont un sens.

Exercice 7

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{Arc}\tan(1+x) - \operatorname{Arc}\tan(x) = \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \operatorname{Arc}\tan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 9

Démontrer que : $\forall x \in [0,1],\ x \geqslant \operatorname{Arc}\tan(x) \geqslant \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan(2x)$.