Exercices supplémentaires : matrices et systèmes linéaires

Exercice 1
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1/ Calculer $A^2 - 3A$.

2/ En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 2
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculer les premières puissances de A puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1/ Calculer les premières puissances de M puis en déduire une conjecture sur M^n pour $n \in \mathbb{N}$ que vous démontrerez par récurrence.

2/ Retrouver le résultat précédent en décomposant M sous la forme $I_2 + A$. A est-elle inversible ?

Exercice 4
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1/ Déterminer α et β deux réels tels que $A = \alpha I_3 + \beta J$.

2/ En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$ et A une matrice carrée d'ordre n telle que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$ (on dit que A est une matrice nilpotente d'ordre p.

1/ Démontrer que A n'est pas inversible.

2/ Montrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

3/ Même question avec $I_n + A$.

Exercice 6
Résoudre le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & -3 \\ 4x - y - 3z & = & -14 \\ x - 3y + 4z & = & \frac{35}{2} \end{array} \right.$.

Exercice 7
Résoudre le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 3x + 3y - z & = & 2 \\ 2x + 4y & = & 2 \end{array} \right.$.

Exercice 8
Résoudre le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z + 3t & = & 0 \\ y - z - 2t + 2u & = & 0 \\ x + y - 5z - 4t & = & 0 \end{array} \right.$.

Exercice 9
Résoudre, suivant les valeurs du réel a, le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & a \\ x + ay + z & = & a \\ x + y + az & = & a \end{array} \right.$.

Exercice 10
Résoudre, suivant les valeurs du réel m, le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} (m+1)x + my & = & 2m \\ mx + (m+1)y & = & 1 \end{array} \right.$.

Exercice 11
Résoudre, suivant les valeurs des réels a, b, c, le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & a \\ -2x-3y & = & b \\ x+y-2z & = & c \end{array}\right.$.

Exercice 12
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, avec $m \in \mathbb{R}$.

1/ Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ?

2/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des réels non nuls.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

1/ Écrire le système $AX = B$ puis le résoudre.

2/ En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A.

Exercice 14
Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse :

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(3;11)$, $B(1;3)$ et $C(6;-2)$.
Démontrer qu'il existe une unique parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par ces trois points.

Exercice 16
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1/ ***a)*** Démontrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

b) Calculer la matrice $T = P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?

c) Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et T.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PT^nP^{-1}$.

2/ ***a)*** Déterminer la matrice N telle que $T = I_3 + N$. Calculer N^2, N^3 puis en déduire N^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer T^n en fonction des matrices N et I_3, et de n, puis en déduire la matrice T^n avec ses coefficients.

c) Montrer que $PNP^{-1} = A - I_3$ et en déduire que $PN^2P^{-1} = A^2 - 2A + I_3$.

d) Pour tout entier naturel n, exprimer A^n en fonction des matrices I_3, A et A^2, et de n.