Exercices supplémentaires : les nombres complexes

Exercice 1
Déterminer la forme algébrique de $z_1 = (2+3i)(-4+i), z_2 = \dfrac{5-2i}{i-3}$, $z_3 = (1-2i)^3$ et $z_4 = \dfrac{1}{2+i} - \dfrac{1}{3-i}$.

Exercice 2
Déterminer la forme trigonométrique, puis la notation exponentielle de $z_1 = -2+2i, z_2 = -3-3i\sqrt{3}, z_3 = -(2-2i\sqrt{3}), z_4 = \dfrac{(1-i)^4}{(-1+i\sqrt{3})^5}$ et $z_5 = \dfrac{2}{(-2\sqrt{3}-6i)^n}, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3
1/ Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique de $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

2/ En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \bar{z} = |z|$.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
1/ $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.
2/ $z^2 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Exercice 6
Déterminer les nombres entiers relatifs n tels que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 7
Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 8
Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Exercice 9
Montrer que dans $\mathbb{C}$ l' équation $z^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0$ a une unique solution réelle.

Exercice 10
Montrer que dans $\mathbb{C}$ l' équation $z^3 - z^2 + (5+7i)z + 10 - 2i = 0$ a une unique solution imaginaire pur.

Exercice 11
1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.
2/ Si $z \neq 1$ est une solution de l'équation précédente, montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3/ En déduire une équation du second degré dont $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est solution.
4/ En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5}$.
5/ Calculer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $S_n = 1 + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + ... + \cos\dfrac{2n\pi}{5}$.