Exercices supplémentaires : les nombres entiers

Exercice 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{11}{4} \times 3^n - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}n$.

Exercice 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$.

Exercice 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 7$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times (-2)^n + 4 \times 3^n$.

Exercice 4
Soit $n \in N^*$. Calculer les sommes suivantes :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2-3k)$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier le plus possible :

1/ $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (ij)$.

2/ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{2k}{n+1}\right)$.

Exercice 6
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}$.

Exercice 7
Soit n un entier naturel non nul.

1/ Calculer le produit des entiers pairs de 1 à $2n$.

2/ Calculer le produit des entiers impairs de 1 à $2n+1$ (penser à "intercaler" les entiers pairs).