Exercices supplémentaires : intégration

Exercice 1
Déterminer les primitives suivantes en précisant l'intervalle :

1/ $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$ 2/ $\displaystyle\int \frac{1}{(2t+1)^3}\,\mathrm{d}t.$ 3/ $\displaystyle\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}u.$ 4/ $\displaystyle\int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$

5/ $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$ 6/ $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$ 7/ $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

1/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$ 2/ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$ 3/ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(x)\,\mathrm{d}x.$ 4/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

5/ $\displaystyle\int_{1+e}^{2+e} \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$ 6/ $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 3
A l'aide d'intégrations par parties, déterminer les primitives et calculer les intégrales suivantes :

1/ $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x.$ 2/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x\cos(x))\,\mathrm{d}x.$ 3/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^3(x))\,\mathrm{d}x.$ 4/ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$

5/ $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 4
A l'aide des changements de variables proposés, calculer les intégrales suivantes :

1/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$, à l'aide du changement de variables $u=\sqrt{t+1}$.

2/ $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, à l'aide du changement de variables $t=\sqrt{x}$.

3/ $\displaystyle\int_e^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+x\ln^2(x)}$, à l'aide du changement de variables $t=\ln(x)$.

4/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$, à l'aide du changement de variables $t=e^x$.

5/ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $x=\sin(t)$.

Exercice 5
Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\int_n^{2n}\arctan(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2}$ en encadrant $\arctan(x)$ sur $[n,2n]$.

Exercice 6
Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et $f:[0;a]\longrightarrow\mathbb{R}^{+*}$ continue.

1/ Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}dt$ à l'aide du changement de variables $u=a-t$.

2/ Application : calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^{\sin(t)}}{(\cos(t))^{\sin(t)}+(\sin(t))^{\cos(t)}}dt.$

Exercice 7
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1/ A l'aide du changement de variables $t = a+b-x$, démontrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2/ En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 8
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$.

1/ Effectuer une IPP sur I_n pour obtenir une relation entre I_{n+1} et I_n.

2/ Calculer I_1 et en déduire I_2.

Exercice 9
Intégrales de Wallis

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$, avec un changement de variable laissant invariantes les bornes.

2/ Calculer I_0 et I_1.

3/ Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. Qu'en déduit-on ?

5/ Effectuer une IPP sur I_{n+2} pour démontrer que pour tout n entier naturel, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

6/ En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

7/ En utilisant 5/, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire I_{2p+1}, pour $p \in \mathbb{N}$.

8/ En utilisant le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ et la question 5/, montrer que $I_{n+1} \sim I_n$ puis déterminer un équivalent de I_n.

9/ En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 10
Soit la fonction $F : \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt \end{array} \right.$.

1/ Montrer que F est C^1 sur $]0;+\infty[$.

2/ Montrer que $\forall x > 0$, $F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2$ à l'aide du changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$.

3/ En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}dt = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 + F(x)$ (aide : factoriser x dans ln).

Exercice 11
On pose $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\mathrm{d}t$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f et montrer que f est paire.

2/ Démontrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

3/ A l'aide du théorème d'encadrement, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12
En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.