Exercices supplémentaires : dérivation

Exercice 1
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

1/ Montrer que $g : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur $]a, b]$ est prolongeable par continuité en a.

2/ En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ (appliquer le théorème de Rolle au prolongement $\tilde{g}$ de g sur $[a, b]$).

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1/ On définit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\tan(t)) \end{array} \right.$. Montrer que g est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$.

2/ En appliquant le théorème de Rolle au prolongement de g, montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f'(d) = 0$.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1/ Montrer que $f : x \longmapsto e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} \times \dfrac{x^n}{n!}$.

2/ On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) Démontrer que $f(0) = 1$ et que $f(1) = \dfrac{u_n}{e}$.

b) En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{u_n}{e} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{n!}$$

.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.