Exercices supplémentaires : limites et continuité

Exercice 1
Déterminer la limite, si elle existe, de :

1/ $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ en 1.

2/ $\ln(x)+\dfrac{1}{x^2}$ en 0.

3/ $x\left|\dfrac{1}{x}\right|$ en 0.

4/ $\dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ en 0 et en $+\infty$.

5/ $\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$ en 0 (penser à la quantité conjuguée).

6/ $\dfrac{x^3-2x+1}{x^3-4x+3}$ en 1 (factoriser numérateur et dénominateur par $(x-...)$).

7/ $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ en 1 (faire apparaître une limite du chapitre précédent).

8/ $\arctan\left(\sqrt{1+\ln(x)}\right)$ en $+\infty$.

9/ $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.

10/ x^x en 0.

Exercice 2
Déterminer un équivalent puis la limite de :

1/ $4x^4-3x^2+5x$ en 0 et en $+\infty$.

2/ $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ en 0 et en $+\infty$.

3/ $\dfrac{e^x-1}{\sin^3(x)}(\cos(x)-1)$ en 0.

4/ $\dfrac{\sin(6x)}{e^{\frac{x}{3}}-1}$ en 0.

5/ $(1+\tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}$ en 0 (passer à l'écriture exponentielle).

6/ $\dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$ en 0.

7/ $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ (passer à l'écriture exponentielle).

8/ $x\ln(x^2+1)-2x\ln(x)$ en $+\infty$ (factoriser à l'intérieur du logarithme de x^2+1).

9/ $\dfrac{\ln(3^x-2^x)}{x}$ en $+\infty$.

10/ $e^{\tan(x)-\sin(x)}$ en 0.

11/ $2x-\sqrt{4x^2-x+1}$ en $+\infty$.

12/ $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$ en 0.

13/ $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^x$ en $+\infty$.

Exercice 3
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1/ Démontrer que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=0 \Longleftrightarrow e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.

2/ Donner un exemple de fonctions f et g pour lesquelles $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$ mais $f(x) \underset{x\to a}{\nsim} g(x)$.

Exercice 4
Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f est-elle continue en 0 ?

Exercice 5
Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, de continuité, puis si la fonction est prolongeable par continuité :

1/ $f : x \longmapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)}$.

2/ $f : x \longmapsto \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1-x}$.

3/ $f : x \longmapsto (x-1)\ln(x-1)$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

1/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

2/ En déduire que f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7
Soit $f : [0;1] \longmapsto [0;1]$ continue.

1/ Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$. Quel est le signe de $g(0)$? de g(1) ?

2/ Montrer que f possède un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}, f(c) = c$ (appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g).

Exercice 8
Démontrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}$ et (E_n) l'équation $x + \ln(x) = n$.

1/ Montrer que $f : x \longmapsto x + \ln(x)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire que (E_n) a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

2/ Déterminer le sens de variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1}$ et conclure).

3/ Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (utiliser $f^{-1}(n)$).

4/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n\left(1 + \dfrac{\ln(x_n)}{x_n}\right) = n$.
En déduire un équivalent de x_n.

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$.

1/ Montrer que f est bornée sur $[0, T]$.

2/ En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.