

## Exercices supplémentaires : fonctions usuelles

### Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1/  $9e^{2x} - 6e^x + 1 = 0$ .

2/  $5e^{-2x^2} - 1 \leq 0$ .

3/  $\ln|x| + \ln|3-x| = 0$  (étudier tous les cas).

4/  $(x^3)^x = x^{(x^3)}$ .

5/  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  sur  $[0, 2\pi]$ .

6/  $\sin(x) = \cos(2x)$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

7/  $\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2

1/ Étudier sur  $\mathbb{R}$  les fonctions  $f : x \mapsto \sin(x) - x$  et  $g : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ .

2/ En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ .

### Exercice 3

1/ Étudier les fonctions  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$  et  $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$ .

2/ En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

### Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1/  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}}\right)$ .    2/  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x}\right)$ .    3/  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x^3}\right)$ .    4/  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (x \tan(x))$ .

### Exercice 5

1/ Démontrer que  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

2/ Démontrer que  $\forall a \in \mathcal{D}_{\tan}, \forall b \in \mathcal{D}_{\tan}$ , avec  $a + b \in \mathcal{D}_{\tan}$ ,  $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ .

3/ En déduire que  $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1$ , puis la valeur exacte de  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ .