

CONCOURS BLANC N° 2
Épreuve de mathématiques ; durée : 4 heures
Exercice 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Étude de la fonction f .

- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , noté D_f .
- b) Étudier les variations de f sur $] -2, +\infty[$.
- c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0. On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.
- d) Établir que : $\forall x \in] -2, +\infty[, \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}x$.
- e) Représenter l'allure de C_f dans un repère du plan judicieusement choisi. Donnée : $\ln(3) \approx 1,1$.

2. Étude de la suite (u_n) .

- a) Compléter le graphique obtenu à la question 1. e) par le tracé des premiers termes de la suite (u_n) . Que peut-on conjecturer ?
- b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
- c) En utilisant le résultat établi à la question 1. d), établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
- d) Dédire du résultat précédent que la suite (u_n) est strictement décroissante et convergente.
- e) Déterminer la limite de (u_n) .
- f) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.
- g) À partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n \leq 0,01$?

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = 1 + e^t + te^t$. À l'aide du tableau de variations de φ , complété par les limites aux bornes, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Donner le signe de f' .
4. Calculer, si elles existent, les dérivées à gauche et à droite en 0. Que peut-on en conclure ?
5. Dresser le tableau de variations de f en complétant avec les limites en $-\infty$ et $+\infty$ qu'on calculera.
6. Préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0, en particulier les éventuelles demi-tangentes en 0, puis tracer l'allure du graphe de f .
7. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser et étudier la dérivabilité de $g = f^{-1}$ sur J .

Exercice 3 :

On définit la fonction $\cot :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in]0, \pi[, \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Justifier que la fonction $\cot$ est dérivable sur $]0, \pi[$, puis vérifier que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \cot'(x) = -1 - (\cot(x))^2.$$

2. Montrer que la fonction $\cot$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$. On appellera g la fonction réciproque : $g = \cot^{-1}$.
3. a) Déterminer $g(0)$, $g(1)$ et $g(-1)$.
b) Donner le sens de variation de g et les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. a) Justifier qu'il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\text{Arctan}(x) + \alpha$.
b) Déterminer la valeur de α .
6. On définit la fonction $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = g\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$.
a) Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
b) Donner une expression simplifiée de h en fonction de g sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$.

Exercice 4 : Étude de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. Pour tout endomorphisme u de E et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$ et on pose $u^0 = Id_E$.

On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que I_3 est la matrice unité et que $\text{rg}(u)$ est le rang de l'application linéaire u .

On rappelle enfin que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.

Partie A : Matrice d'un endomorphisme nilpotent

1. Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier que, si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.
2. Soit u un endomorphisme de E et soient i et j deux entiers naturels. On considère l'application linéaire w de $\text{Ker}(u^{i+j})$ dans E définie par $w(x) = u^j(x)$, autrement dit w est la restriction de u^j au sous-espace vectoriel $\text{Ker}(u^{i+j})$ de E .
a) Montrer que : $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$ et que $\text{Ker}(w) = \text{Ker}(u^j)$.
b) En déduire que : $\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u^j))$ à l'aide du théorème du rang.
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2$.
a) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$ en utilisant la question 2. deux fois.
b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0_E$ et en déduire que la famille $\mathcal{B} = (u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = 1$.
a) Montrer qu'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0_E$.
b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\text{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $\mathcal{B}' = (b, u(b), c)$ est une base de E .
c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie B : Une condition suffisante

Soit désormais une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

5. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
6. Calculer N^3 , puis $T \times (I_3 - N + N^2)$ et en déduire que : $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

7. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 2$. On pose : $M = N^2 - N$.

a) Montrer que N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question 3.,

une matrice semblable à M .

b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rg}(M)$.

c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

d) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

8. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable

à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

ΥΥΥΥΥ