

DS n° 5
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels tels que : $e^x - e^{-x} > 0$.
 b) On définit la fonction f par : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.
 Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ et déterminer un équivalent simple de $f(x) - x$ en $+\infty$.
2. Résoudre l'équation (1) et l'inéquation (2) :
 (1) $-e^{2x} + e^{x+1} + e^x = e$; (2) $3(\ln(x))^2 - 7\ln(x) - 10 \leq 0$.
3. Déterminer les limites suivantes :
 a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 1}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{2x^2 + x - 1}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}$.

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
2. Pour $x \in \mathcal{D}$, calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$ en faisant figurer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
 b) Tracer le graphe de f dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que $e \approx 2,7$.
4. a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x , pour $x \in \mathcal{D}$.
 b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in \mathcal{D}$.
5. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$.
 b) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.
6. a) Montrer que : $\forall x \in [e, 3], 3x - 4e \ln(x) \leq -e$.
 b) En déduire que : $\forall x \in [e, 3], x - e \ln(x) \leq \frac{1}{4}(x - e)$.
7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$.
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
 c) Quel résultat peut-on retrouver grâce à ce qui précède ?

Exercice 3

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 2e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
 b) Déterminer la limite de g à droite en 0.
 c) Le graphe de g intersecte-t-il la droite d'équation $y = x$?

On considère la fonction $h : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \ln(t) - t$ pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

2. a) Étudier les limites de h au bord de son domaine de définition.
 b) Justifier que h est dérivable et calculer sa dérivée.
 c) Dresser le tableau de variation de h .
 d) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln(2t) < t$.

e) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $g(x) > 0$.

On fixe un réel $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}}$.

3. a) Montrer que u_n est ainsi bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

c) Montrer que la valeur de cette limite est $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

On se donne un réel $\alpha > 0$.

4. a) Montrer que : $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1-s)^{-\alpha} - 1 - \alpha s}{s} = 0$.

b) Déterminer la limite de $2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

c) Dédurre des deux questions précédentes que $u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

d) Soit un réel $\varepsilon > 0$. En écrivant que $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha}| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|$ pour un entier p bien choisi, montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq q$, on ait l'inégalité $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq 2\varepsilon n$.

e) En déduire la limite du quotient $\frac{u_n^{-\alpha}}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

f) Calculer la limite de $n^\alpha u_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4 UNE ÉQUATION À DEUX INCONNUES

On rappelle la formule de dérivation : si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I , alors $\text{Arc tan}(u)$ aussi et $(\text{Arc tan}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$.

1. Soit $g : x \mapsto \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer sa dérivée.

b) En déduire la valeur de $\text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2. On s'intéresse dans la suite à l'égalité : $\text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}(y) = \text{Arc tan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ $(\star)$.

a) Vérifier que cette égalité est vraie lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.

b) Montrer que (x, y) vérifie $(\star)$ si, et seulement si, $(-x, -y)$ vérifie $(\star)$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose : $\varphi : x \mapsto \text{Arc tan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de φ .

b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer la dérivée de φ .

On vérifiera que : $\forall x \in \mathcal{D}, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

c) En déduire une expression simple de φ (on pourra distinguer plusieurs cas suivant les intervalles et les valeurs de a considérées).

d) En déduire l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $(\star)$.

ΥΥΥΥΥ