DS n° 5
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Un lac compte 5000 carpes. Chaque année, 5% de l'effectif meurent, mais on en réintroduit 300. Ainsi on modélise l'évolution du nombre de carpes (en centaines) par la suite (u_n) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 50 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,95u_n + 3. \end{cases}$$

a) Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et préciser sa limite.

2. Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n \end{cases}$.

a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.

b) À l'aide d'un télescopage, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} n2^n$ pour $N \geqslant 2$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ et $T_n = \dfrac{1}{n^2} S_n$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n(n+1)}{2}x - n \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}x$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Déterminer $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} = k(v_n - u_n)$.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > u_n$.
3. a) Déterminer le sens de variation de (u_n) et de (v_n).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

c) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$.

a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de s_n en fonction de n.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1,\ w_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{2}$.

c) En déduire une relation simple entre les termes de (s_n) et de (u_n) puis une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 3 (Les cinq questions sont indépendantes)

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x) - 1}$; b) $g : x \longmapsto \ln(e^x - 1)$; c) $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x+1)}$.

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes en précisant pour quelles valeurs de x :

a) $A(x) = \dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$; b) $B(x) = -\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; c) $C(x) = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x}$.

$\hookrightarrow$

3. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $\big(1+\ln(x)\big)^2 = 4$; b) $\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$; c) $\dfrac{1}{e^x+1} < 2$; d) $\ln(10-x^2) > 0$;
e) $\tan(x) = \sin(2x)$.

4. Calculer les limites suivantes : a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{-x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$.

5. On définit la fonction $f : x \longmapsto -\operatorname{Arc}\tan(2x^2) - \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et calculer ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

b) Calculer la dérivée de f et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$ [On rappelle la formule de dérivation : $(u\circ v)'(x) = u'(v(x))\times v'(x)$].

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Établir l'encadrement : $\forall x \geqslant 1,\ 1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

2. a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, qu'on notera a.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$, qu'on notera b.

c) Montrer qu'il existe un réel c tel que : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) - ax - b = \dfrac{c}{2x-1}$ et donner la valeur de c.
Justifier alors que : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant \dfrac{2x+1}{4}$.

d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)]$ et interpréter ce résultat concernant $\mathcal{C}_f$.

3. a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $y = ax+b$ et $y = \dfrac{x+1}{2}$ dans le même repère.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x) = x+1+\dfrac{2}{x-1}$, puis montrer que la dérivée de f sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est donnée par $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ et en déduire les variations de f, en précisant les limites aux bornes.

2. Représenter sommairement le graphe de f et de la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ du plan (*prendre* $0,5$ *cm pour unité ou un demi "grand carreau"*).

3. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie en montrant que si $u_0 > 1$, alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n > 1$, et si $u_0 < 1$, alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n < 1$.

4. En supposant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$, déterminer ℓ.

5. On suppose que $u_0 > 1$. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer sa limite éventuelle.

6. On suppose $u_0 \leqslant -1$. Montrer qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge. Donner sa limite.

7. On suppose $0 < u_0 < 1$. Étudier la nature et déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. On suppose $-1 < u_0 \leqslant 0$. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in [-1,0]$ et en déduire la monotonie, la nature et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\Upsilon\curlyvee\Upsilon\curlyvee\Upsilon$