

DS n° 4
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles équivalentes ? semblables ?

Justifier.

2. Déterminer les parties réelle, imaginaire, module et argument des nombres suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}, \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^{11}, \quad z_3 = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}, \quad z_4 = (1+i)^n + (1-i)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3. Linéariser l'expression $A(x) = (\sin(x))^4$ et en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ en choisissant une valeur particulière de x .

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) $z^4 - 8z^2 + 25 = 0$ (on pourra poser $Z = z^2$).

Exercice 2

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la

matrice dans la base $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -11 & -4 \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la

matrice dans la base $\mathcal{C}$ est $B = A - I_3$ où I_3 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f((x, y, z))$. En déduire $\text{Ker}(f)$ dont on donnera une base.

b) Déterminer l'image de f et en donner une base.

c) Calculer A^2 puis déterminer une base de $\text{Ker}(f^2)$ où f^2 désigne $f \circ f$.

2. a) Vérifier que : $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Que peut-on en déduire pour f^3 ? A^3 ?

b) En déduire que : $B^3 + 3B^2 + 3B + I_3 = 0$, que B est inversible et exprimer son inverse en fonction de B . Que peut-on dire de g ?

3. On pose $u_1 = (2, 0, 1)$; $u_2 = (-1, -1, 2)$; $u_3 = (1, 0, 0)$.

a) Montrer que $\mathcal{C}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$, puis écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}'$.

c) En déduire la matrice B' de g dans la base $\mathcal{C}'$.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, B'^n = \frac{(-1)^n}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2n & n^2 - n \\ 0 & 2 & -2n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis expliquer comment on

pourrait obtenir B^n (on ne demande pas de faire les calculs).

Exercice 3

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$$

$$E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Établir que : $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b) Montrer que, si A est inversible, alors : $E_1(A) = E_2(A)$.

3. a) Établir que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

b) Un exemple : soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est C dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

(on choisira des vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 ayant 1 pour première coordonnée dans la base canonique).

2. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Quelle relation peut-on écrire entre D, C, P, P^{-1} ?

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

Montrer que : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.

4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe a, b, c réels tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.

Exercice 4

On considère l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \frac{z - i - 2}{z + i}.$$

1. Calculer $f(1 + 2i)$ et mettre ce nombre sous forme algébrique.

2. a) Déterminer, s'ils existent, les antécédents par f de $i, 1$ et 0 .

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|f(z)| = 1$ et, parmi ceux-ci, ceux dont le module vaut 1.

4. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel si, et seulement si, z est de la forme $z = \lambda + i(\lambda - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 5

On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ où Tr désigne la trace et

$$(A, B) \longmapsto \text{Tr}({}^t A \cdot B)$$

${}^t A$ la transposée de A .

1. Démontrer les trois propriétés suivantes :

a) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A, B) = f(B, A)$.

b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A, A) = 0 \implies A = 0$.

c) Si A est symétrique et B antisymétrique, alors $f(A, B) = 0$.

2. On pose $N(A) = f(A, A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda A + B, \lambda A + B) \geq 0$.

b) En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 N(A) + 2\lambda f(A, B) + N(B) \geq 0$.

c) Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |f(A, B)| \leq \sqrt{N(A)N(B)}$ (on pourra raisonner sur le signe d'un trinôme du second degré à préciser).