DS n° 4

(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les cinq questions sont indépendantes)

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

   a) $z_1 = (2-i)(3+8i)$; b) $z_2 = \dfrac{(3+5i)^2}{1-2i}$

2. Résoudre les équations suivantes et donner les solutions sous forme exponentielle :

   a) (E_1) $z^2 - 3\sqrt{3}\,z + 9 = 0$; b) (E_2) $z^2 = -\bar{z}$

3. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si, et seulement si, z est un nombre réel.

4. a) Montrer que pour tout réel θ, on a : $\cos(\theta) + \cos(3\theta) = 2\cos(2\theta)\cos(\theta)$.

   b) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on cherche à savoir si A et B sont semblables. Calculer le rang et la trace de A et B, puis le rang de $A - I_3$ et $B - I_3$. Conclure.

Exercice 2

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $w = (0, 1, -1)$. On notera Id l'identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est la droite vectorielle engendrée par u.

2. La matrice A est-elle inversible ? (on ne demande pas l'inverse)

3. Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et qui vérifie $f(v) = u$.

4. Déterminer le vecteur w de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et qui vérifie $f(w) = v$.

5. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Expliciter la matrice N de f dans la base $\mathcal{C}$.

   On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

7. Donner la relation liant A, N, P et P^{-1}.

8. En déduire que l'on a $A^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.

   On note C_N l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N i.e. vérifient $MN = NM$.

9. Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

10. Montrer que la famille (I_3, N, N^2) est libre.

11. Montrer que (I_3, N, N^2) est une base de C_N.

    On note de même C_A l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A et on admet que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

12. Montrer que la matrice M appartient à C_A si, et seulement si, la matrice $P^{-1}MP$ appartient à C_N.

13. En déduire que $C_A = \mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$. Quelle est la dimension de C_A ?

↪

Exercice 3

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $v = (1, -1, 1)$.
On désigne par f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$:

$$f(x) = x - 2(x_1 + x_2 + x_3)v$$

où x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soient f_1 et f_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par : $f_1 = f - \mathrm{Id}$ et $f_2 = f + \mathrm{Id}$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_1)$ et de $\mathrm{Ker}(f_2)$.

b) Montrer qu'en réunissant une base de $\mathrm{Ker}(f_1)$ et de $\mathrm{Ker}(f_2)$, on obtient une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

c) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale, puis que f est un automorphisme. Que vaut f^{-1} ?

Exercice 4

On considère le nombre complexe $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2. Déterminer la forme exponentielle de ω^4 et la comparer à celle de $\bar{\omega}$, le conjugué de ω.

3. En déduire la forme algébrique de $\alpha = \omega + \omega^4$.

4. Vérifier que $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que la trace de M est : $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

1. Démontrer que Tr est une application linéaire surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle injective ?

On définit les ensembles $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{I_n\} = \{aI_n \mid a \in \mathbb{R}\}$.

2. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

4. On définit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)I_n \end{array}$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que φ conserve la trace i.e. : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(\varphi(M)) = \mathrm{Tr}(M)$.

c) En utilisant cette propriété, montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice de F et d'une matrice de G. Justifier que cette décomposition est unique.

5. Déduire de ce qui précède qu'en mettant "bout à bout" une base de F et une base de G on obtient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. En déduire $\dim F$. Ce résultat confirme-t-il la réponse sur l'injectivité donnée en 1. ?

ϒϒϒϒϒ