# DS n° 4

*(durée : 4 heures)*

**Exercice 1** (Les trois questions sont indépendantes)

1. a) Mettre sous forme algébrique les nombres : $z_1 = \dfrac{1+3i}{1-2i}$ ; $z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$.

b) Mettre sous forme exponentielle les nombres : $z_3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{i\sqrt{3}-1}$ ; $z_4 = -e^{i\pi} \times \left(\dfrac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right)^5$.

2. Linéariser l'expression $f(x) = \sin^2(x) \times \cos^2(3x)$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence suivante : $|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On désigne par Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et par $I$ la matrice unité d'ordre 3.

1. a) Écrire la matrice des endomorphismes $f - \mathrm{Id}$ et $f - 2\,\mathrm{Id}$, puis déterminer les noyaux de $f$, $f - \mathrm{Id}$ et $f - 2\,\mathrm{Id}$.

b) On pose $e'_1 = (-4, 3, 2)$, $e'_2 = (-4, 0, 1)$ et $e'_3 = (2, 1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Écrire la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la relation qui lie $A$ et $D$.

d) Calculer $D^n$ puis $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) La formule obtenue en d) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$ ?

2. a) Déterminer toutes les matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $D$ c'est-à-dire qui vérifient $DM = MD$.

b) Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que : $X^2 = A \iff (P^{-1}XP)^2 = D$.

c) En utilisant 2. a), déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $Y^2 = D$, puis en déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $X^2 = A$ qu'on exprimera à l'aide des solutions de $Y^2 = D$ et de $P$ sans expliciter leurs coefficients.

**Exercice 3**

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1. Rappeler la dimension de $E$.

On définit l'application $f$ sur $E$ par : $\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = (2x+3)P(x) - (x^2+x)P'(x)$ où $P'$ est la dérivée de $P$ et on note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $E$ où : $\forall k \in \{0, 1, 2\},\ e_k : x \longmapsto x^k$.

2. Justifier que $f$ définit un endomorphisme de $E$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

3. a) Exprimer les polynômes $e_0, e_1$ et $e_2$ comme combinaison linéaire de $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$.

b) En déduire que la famille $\mathcal{B}' = (f(e_0), f(e_1), f(e_2))$ est une base de $E$.
Que peut-on en déduire pour $f$ ?

↪

On définit maintenant l'application $g$ sur $E$ par : $\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(P)(x) = (x+1)P'(x)$ et on admet que g définit aussi un endomorphisme de $E$.

4. a) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

b) Donner une base et la dimension de $\mathrm{Im}(g)$ et en déduire, sans calcul, le noyau de $g$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g)$.

5. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$.

**Exercice 4**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$. Déterminer $N^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis calculer $A^n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ en remarquant que $A = I_3 + N$ (on explicitera tous les coefficients de $A^n$).

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $QA - MQ$. En déduire que $A$ et $M$ sont semblables.

3. Déterminer tous les couples $(p, q)$ de $\mathbb{N}^2$ tels que : $A^p = M^q$.

**Exercice 5**

On cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ : $(E_1)\ :\ \bar{z} = z^2 - 3z + 7$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de $z$.

1. a) Montrer que $(E_1)$ n'admet pas de solution réelle.

b) $(E_1)$ admet-elle des solutions imaginaires pures ?

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de $(E_1)$ si, et seulement si, $\bar{z}$ aussi.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $(E_1)$. Montrer que $z$ est alors solution de l'équation suivante :

$$(E_2) : z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35$$

*On pourra utiliser le fait que $z = \bar{\bar{z}}$.*

4. a) Vérifier que $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ est solution de $(E_2)$. Qu'en est-il de $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$ ?

b) Déterminer une équation du second degré à coefficients réels, notée $(E_3)$, dont les solutions sont $z_1$ et $z_2$.

5. Trouver deux constantes réelles $a$ et $b$ telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 + az + b\right).$$

6. Résoudre $(E_2)$.

7. Résoudre $(E_1)$.

$\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$