

CONCOURS BLANC N° 1
Épreuve de mathématiques ; durée : 4 heures ; calculatrice interdite
Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et écrire sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et en donner une base, puis montrer que : $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.
3. f est-il injectif ? surjectif ? Justifier.
4. Déterminer $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
5. Calculer $f \circ f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et vérifier que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ f)$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A c'est-à-dire tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

1. Déterminer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang de f , son noyau et son image. Que peut-on dire de f ?
3. a) Déterminer le rang de $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donner une base de $\text{Im}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
b) En déduire la dimension et une base de $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ en vérifiant que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
4. Soient $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Exprimer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w .
5. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.
7. a) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et exprimer la matrice A à l'aide de P, D et P^{-1} .
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
c) Donner explicitement la première colonne de A^n en fonction de n .
8. Vérifier que $f^3 = 2f^2 + f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ où $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f^2$.
9. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide de I_3, A et A^2 .
10. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels tel que $A^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$.

Exercice 3

1. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u \circ u = 0$. On note r le rang de u et p la dimension du noyau de u .
a) Démontrer l'inclusion : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
b) Montrer la double inégalité : $r \leq \frac{n}{2} \leq p$.
c) On suppose $n = 2$: dans ce cas, montrer l'égalité $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.
d) On suppose $n = 3$: dans ce cas, calculer les valeurs de r et p .

2. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, v((x, y, z)) = (-x + y + z, -2x + 2y + 2z, x - y - z).$$

- Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(v)$.
 - Déterminer la dimension et une base de $\text{Im}(v)$.
 - Comparer $\text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v)$. Que vaut $v \circ v$?
 - Prouver l'existence d'une base $\mathcal{B} = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $v(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $v(b) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $v(c) = a$. Déterminer explicitement une telle base.
3. Soit $f = \text{Id} - v$ où v est l'endomorphisme du 2. et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1} , qu'on exprimera en fonction de Id et v .

b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \text{Id} + \beta v = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = 0$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n \text{Id} + b_n v$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et

$f^0 = \text{Id}$ par convention.

Justifier que les réels a_n et b_n sont uniques.

Exercice 4

- Pour cette question, soient $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, -2, 1)$ et $v_3 = (2, 0, 3)$.
 - Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Montrer que $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. On note E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$.

c) Donner la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

d) Que vaut $\dim(E_3)$?

Dans toute la suite du problème, $n \geq 1$ désigne un entier naturel quelconque et $v_1, v_2, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit $w_{i,j} = v_i - v_j$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Le but de cette question est de trouver la dimension de E .

- Montrer que $w_{i,j}$ est le vecteur nul si et seulement si $i = j$.
- Justifier que E est de dimension inférieure ou égale à n .
- Montrer que la famille $(w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \dots, w_{1,n})$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
- Soient i et j deux entiers dans $\{1, \dots, n\}$; exprimer le vecteur $w_{i,j}$ en fonction des vecteurs $w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \dots, w_{1,n}$.
- Quelle est la dimension de E ?

- Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit $z_{i,j} = av_i + bv_j$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(z_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver dans quels cas $F = \mathbb{R}^n$.

a) Donner un exemple simple de nombres réels a et b pour lequel $F = \mathbb{R}^n$ et un exemple pour lequel $F \neq \mathbb{R}^n$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

c) On suppose $a^2 \neq b^2$. Trouver deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$.

d) En déduire que, si $a^2 \neq b^2$, alors $F = \mathbb{R}^n$.

e) Que pensez-vous du cas $a^2 = b^2$?