CONCOURS BLANC N° 1

Épreuve de mathématiques ; durée : 4 heures ; calculatrice interdite

Exercice 1

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 3, -1, 0)$, $v_2 = (5, 4, -2, 1)$, $v_3 = (-13, 5, 1, -4)$ et on note $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Justifier que la famille (v_1, v_2) est libre.

b) Montrer que v_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et de v_2.

c) En déduire une base de F et sa dimension.

2. On considère le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u_1, u_2), où $u_1 = (1, 3, 0, 0)$ et $u_2 = (6, 7, -3, 2)$.

a) Calculer le rang de la famille (v_1, v_2, u_1, u_2) et en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et en déduire que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$.

c) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $u(v_1) = 0_{\mathbb{R}^4}$,
$u(v_2) = 0_{\mathbb{R}^4}$, $u(u_1) = u_1$ et $u(u_2) = u_2$. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

3. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, puis déterminer une base de H et sa dimension.

b) Montrer que $v_1 \in H$ et $v_2 \notin H$. En déduire une base de $F \cap H$.

Exercice 2

On considère l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (6x - 2y + 3z, 5y, -2x + 4y - z) \end{array}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.

3. Montrer qu'il existe un réel a, que l'on précisera, tel que $f \circ f = af$.

4. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

5. En déduire la dimension et une base de $\text{Im}(f)$.

6. Démontrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ obtenue en réunissant une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$ précédemment obtenues.

7. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et déterminer la matrice M' de f dans $\mathcal{B}'$. Quelle relation lie M, M' et P ?

8. Calculer M'^n et en déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\hookrightarrow$

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice *pseudo-magique* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \lambda$. Dans ce cas, on note $d(A) = \lambda$. On appelle E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Traduire par une phrase en français la définition d'une matrice pseudo-magique

2. Donner un exemple de matrice A pseudo-magique carrée d'ordre 3 dont les coefficients soient tous les entiers naturels de 0 à 8. Préciser $d(A)$.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. Vérifier que B est pseudo-magique et préciser $d(B)$, puis montrer que B est inversible et calculer B^{-1}. Que constate-t-on ? Que vaut $d(B^{-1})$?

4. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer l'équivalence : $A \in E \iff$ il existe μ réel tel que $AJ = JA = \mu J$.

5. Montrer que si A est une matrice inversible de E, alors $d(A) \neq 0$.
   Montrer que, dans ce cas, A^{-1} appartient à E et calculer $d(A^{-1})$.

6. Soit $A \in E$, montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que : $AX = d(A)X$.

7. Soit $A \in E$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $AX = \alpha X$.
   Montrer que : $|\alpha| \leqslant d(A)$.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dont le rang vaut $2n$. On note $f^2 = f \circ f$.

1. a) Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

   b) On appelle g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$, cela signifie donc que g est l'application linéaire : $g : \begin{array}{ccl} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{3n} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) \end{array}$.

   Montrer que : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

   En déduire que : $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant n$.

2. On suppose désormais, en plus, que $f^3 = 0$ i.e. $f \circ f \circ f = 0$.

   a) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et déterminer la valeur de $\mathrm{rg}(f^2)$.

   b) Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f^2)$.

   c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs qui complète une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ en une base de $\mathbb{R}^{3n}$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n, f(e_1), \ldots, f(e_n), f^2(e_1), \ldots, f^2(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}^{3n}$.

   d) Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. <u>Exemple</u> : on considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Que vaut φ^3 ?

   Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ϒϒϒϒϒ