

DS n° 2
(durée : 4 heures)

Exercice 1 Les questions A), B) et C) sont indépendantes

A) Soient a, b, c trois nombres réels fixés, et soit (S) le système
$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

1. a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, transformer (S) en un système échelonné.

b) À quelle condition portant sur les réels a, b, c le système (S) est-il compatible ?

c) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

2. Résoudre le système (S) lorsque $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, puis lorsque $(a, b, c) = (1, -2, 1)$.

B) Résoudre, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$(S') \begin{cases} x + y - z = -1 \\ mx + (m+1)y - z = -2 \\ (m+1)x + y + (-3-m)z = -3 \end{cases}$$

C) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est inversible.

2. Soit $a = 2$. Calculer l'inverse de A par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 2 (La question 1. est indépendante des questions 2. et 3.)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $E_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \alpha^2 y - \alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha = 0\}$.

a) E_1 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

b) Montrer que E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une base.

c) Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles E_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$; pour chaque valeur de α trouvée, donner une base de E_α .

d) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(-2, 1)$. Déterminer $F \cap E_{-1}$ et préciser sa dimension.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $w_1 = (1, 1, 2)$ et $w_2 = (1, -1, 1)$.

a) Montrer que : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de E et sa dimension.

b) Montrer que : $\text{Vect}\{w_1, w_2\} = E$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) du réel a le vecteur $w = (-a, 5, a)$ est-il combinaison linéaire de w_1 et w_2 ? Pour cette(ces) valeur(s) de a , écrire w sous la forme $\lambda w_1 + \mu w_2$ en précisant λ et μ .

d) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$. Montrer que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
$$(x, y, z) \longmapsto (-x + y + z, 5x - y + z, x + y + 2z)$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en donner une base et sa dimension.

c) En déduire la dimension et une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^4$, on définit les parties suivantes : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{u, v, w\}$ où $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0, 0)$ et $w = (-2, -1, 0, 0)$.

1. a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une famille génératrice puis une base et sa dimension.
b) Déterminer une base et la dimension de G .
2. a) Les vecteurs u, v, w appartiennent-ils à F ? Que peut-on en déduire pour $\dim(F \cap G)$?
b) Déterminer $\dim(F \cap G)$, puis une base de $F \cap G$.
3. Déterminer un vecteur $t \in \mathbb{R}^4$ tel que $t \notin F$ et montrer alors que la famille formée par les vecteurs de la base de F trouvée en 1. a) et le vecteur t est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
$$(x, y, z, t) \longmapsto (z + t, 2z - t)$$
 - a) Montrer que f est linéaire.
 - b) Déterminer $\text{Ker}(f)$. En donner une base et sa dimension.
 - c) En déduire la dimension et une base de $\text{Im}(f)$. f est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 4

Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Soient M et N dans $\mathcal{C}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda M + N$ est dans $\mathcal{C}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude de A et de $\mathcal{C}$

2. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et donner son inverse.
3. a) Montrer que toute matrice M de la forme $M = xI_2 + yA$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dans $\mathcal{C}$.
b) Réciproquement, montrer que toutes les matrices appartenant à $\mathcal{C}$ sont de la forme $M = xI_2 + yA$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathcal{C}$.
 - a) Montrer que le produit MN appartient à $\mathcal{C}$.
 - b) Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.
5. Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathcal{C}$.
6. On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^3 = -M\}$.
Vérifier que $A \in \mathcal{F}$. Est-ce que $-A \in \mathcal{F}$? Est-ce que toute matrice de $\mathcal{F}$ est inversible?

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathcal{C}$

On fixe une fonction polynôme du second degré à coefficients réels : $P(x) = x^2 + ux + v$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $P(N)$ la matrice $P(N) = N^2 + uN + vI_2$.

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{C}$ telle que $P(M) = 0$

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

b) En déduire que : $P(M) = 0 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v = 0 \\ 2ab + ub = 0 \end{cases}$.

8. On note $\Delta = u^2 - 4v$ le discriminant de l'équation $P(x) = 0$.

Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en distinguant deux cas :

- a) Si $\Delta \geq 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.
 - b) Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.
9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0$.