DS n° 2

(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Résoudre le système $(S)\ \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$.

2. a) À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b et c le système $(S')\ \begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x+8y-14z=b \\ 2x+4z=c \end{cases}$ possède-t-il au moins une solution ?

b) Écrire la matrice A associée au système (S'). A est-elle inversible ?

3. Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m, le système $(S'')\ \begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$.

Exercice 2

On souhaite résoudre le système d'équations non linéaires à trois inconnues

$$(S)\ \begin{cases} x^2-yz=5 \\ y^2-xz=-1 \\ z^2-xy=3 \end{cases}.$$

Pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on introduit les matrices :

$$M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit (x, y, z) une solution de (S).

a) Montrer que : $AM_{x,y,z} = (5x-y+3z)I_3$.

b) Exprimer $M_{x,y,z}$ en fonction de A^{-1} et en déduire que (x, y, z) est solution d'un système d'équations linéaires.

c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = 2\lambda, y = -\lambda$ et $z = \lambda$.

d) En déduire que (S) admet exactement deux solutions que l'on précisera.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs : $v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1, 1)$, $v_3 = (2, -3, -1, -1), w_1 = (1, 1, 0, 1)$ et $w_2 = (0, 0, 1, -1)$.

1. a) Calculer le rang de la famille (v_1, v_2, v_3). La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Sinon trouver une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs puis donner une base de $E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Le vecteur w_1 appartient-il à E ?

2. a) Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z=0 \text{ et } z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base et sa dimension.

b) Montrer que $E = F$.

3. Montrer que $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y-z-t=0 \text{ et } x-2y+z+t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que (w_1, w_2) est une base de G.

4. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$\hookrightarrow$

5. Déterminer $E \cap G$.

6. a) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déterminer les coordonnées a, b, c, d de u dans $\mathcal{B}$.

b) Soit p l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$p((x, y, z, t)) = (x - 2y + z + t, -2x + y + z + t, -x - y + 2z + 2t, -x - y + 2z + 2t).$$

Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

c) Vérifier que $\mathrm{Ker}(p) = G$. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(p)$ puis que $\mathrm{Im}(p) = E$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note f l'application linéaire canoniquement associée à A et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Déterminer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Calculer A^2.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle ; on en précisera une base formée d'un vecteur dont la 1ère coordonnée vaut 1, et que l'on notera u.

2. a) On pose $c_1 = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), c_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), c_3 = \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$.

Montrer que $c_3 \in \mathrm{Vect}\{c_1, c_2\}$.

b) En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est un plan vectoriel, dont on précisera une base.

3. a) Montrer que $f \circ f = f$.

b) En déduire que pour tout $v \in \mathrm{Im}(f)$, $f(v) = v$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

4. a) Montrer que la famille (c_1, c_2, u) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soient a, b et c les coordonnées de v dans la base (c_1, c_2, u).

Exprimer $f(v)$ en fonction de a, b, c et des vecteurs c_1 et c_2.

$\Upsilon\gamma\Upsilon\gamma\Upsilon$