

DS n° 1
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Mettre sous forme irréductible les fractions : $A = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{4}}{\frac{3}{8} + \frac{7}{5}}$ et $B = \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$.
2. Écrire sous forme d'une fraction simplifiée l'expression $C = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$D = \frac{a^{2n+1}a^{-n+3}}{a^{n-2}} \quad \text{et} \quad E = \frac{(a^2b^{-3})^2(a^{-1}b)^3}{a^4b^{-2}}.$$

Exercice 2 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. a) Énoncer les propriétés de distributivité de l'intersection et de la réunion.
 b) Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Justifier les égalités suivantes :

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$
2. Soient E, F, G trois ensembles tels que : $E \cap F \subset E \cap G$ et $E \cup F \subset E \cup G$.
 Montrer que $F \subset G$ (on pourra s'aider d'un schéma mais le raisonnement devra être entièrement rédigé).
3. a) Énoncer le théorème de caractérisation des bijections.
 b) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x-1}{-x+2}$. Montrer que f définit une application de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
 c) Soit $g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Montrer que f et g sont bijectives et réciproques

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$
 l'une de l'autre.
4. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications, avec E, F et G des ensembles quelconques. Démontrer les résultats suivants :
 a) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
 b) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.
 c) en général, si A est une partie de E et $\overline{A}$ son complémentaire, il n'y a aucune inclusion entre $f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)}$. On utilisera des contre-exemples.

Exercice 3 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $7^n - 1$ est un multiple de 6.
2. Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \geq 2^n$.
3. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Exercice 4 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{3k}$, puis $B = \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} (-1)^k$.
2. Calculer les sommes suivantes :
 a) $S = \sum_{k=1}^n k \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ (on commencera par simplifier le terme général de la somme).

b) $T = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} x^i \binom{j}{i}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

3. a) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) À l'aide du résultat du a), calculer $A_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (i-j)^2$.

c) Soient i et j dans $\mathbb{N}$. Donner une autre expression de $|i-j|$ selon que $j \leq i$ ou $j > i$.

d) En utilisant le a), calculer $B_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i-j|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si, pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, a_{ij} est un réel positif et : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

1. Traduire, par une phrase en français, les conditions pour qu'une matrice soit stochastique.

2. **EXEMPLES** : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que A et B sont stochastiques, puis que $C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ et $D = AB$ le sont.

Les matrices ${}^tA$ et ${}^tB$ sont-elles stochastiques ?

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, A^n est triangulaire inférieure, et que ses coefficients diagonaux sont 1, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) On note u_n le coefficient d'indices $(3, 2)$ de A^n (donc $u_1 = \frac{1}{3}$). En écrivant $A^{n+1} = A^n \times A$, montrer que : $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

d) On pose $w_n = 2^n u_n$. Montrer que (w_n) vérifie : $\forall n \geq 1, w_{n+1} - w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, puis, en sommant ces égalités, exprimer w_n en fonction de n .

e) En déduire que, pour tout $n \geq 1, u_n = 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$.

f) En déduire le coefficient d'indices $(3, 1)$ de A^n en fonction de n .

3. **CAS GÉNÉRAL** : soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $C = AB$ est une matrice stochastique.

b) Montrer que : $\forall \lambda \in [0, 1], D = \lambda A + (1 - \lambda)B$ est une matrice stochastique.

c) Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer que $AV = V$ et en déduire que $A - I_n$ n'est pas inversible.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est stochastique, puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*, M = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k$

l'est aussi.

ΥΥΥΥΥ