

DS n° 1
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. a) Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes : $F_1 = \frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{5}}{\frac{20}{3} + \frac{7}{20}}$ et $F_2 = \frac{5 \times \frac{3}{4} - \frac{4}{5}}{4 + 2 \times \frac{3}{11}}$.

b) Soient a, b et c des réels non nuls. Simplifier et donner le résultat sous la forme d'un quotient de puissances à exposants positifs :

$$A = \frac{(a^{-1}b)^3}{(ab^{-2})^{-2}} \quad B = \frac{(-a)^3 bc^{-4}}{b(-c)^2 a^4}.$$

c) Réduire au même dénominateur l'expression $f(x) = 2 - \frac{3}{x-2} + \frac{10}{x-3}$ en précisant pour quels réels le calcul est valable, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$.

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a) f est-elle injective ? Justifier.

b) Déterminer les antécédents de -1 et 0 par f s'ils existent. f est-elle surjective ? bijective ?

c) Si f n'est pas bijective, donner un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que la restriction de f à I soit bijective en justifiant. Donner la réciproque de cette bijection.

3. Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\overline{A}$, $A \setminus B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

4. Soient trois ensembles A, B, C . Montrer l'équivalence : $A \subset B \subset C \iff A \cup B = B \cap C$. (on pourra s'aider d'un schéma, mais le raisonnement devra être entièrement rédigé).

Exercice 2 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $3^n \geq 3n^2$.

2. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

3. On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

Démontrer, par récurrence double, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Exercice 3 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n+1} (2k-3)$, $S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{3^{k-1}}{2^{k+1}}$ et $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} |n-k|$.

2. a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. Donner la définition de $\binom{n}{k}$.

b) Exprimer $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ à l'aide de $\binom{n+1}{k+1}$.

c) En déduire la valeur de $S_4 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{p-k}{n-k} \times \frac{1}{2^k}$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$.

4. Calculer $T = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Les deux questions sont indépendantes)

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \times B \neq 0$ et $B \times A = 0$.
 - a) Montrer que les matrices A et B ne sont pas inversibles. On pourra raisonner par l'absurde.
 - b) Démontrer que $(AB)^2 = 0$.
 - c) Donner un exemple de matrices A et B vérifiant ces conditions dans le cas $n = 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
 - a) Montrer que $A^2 = 7A - 10I_3$.
 - b) À l'aide de a), exprimer A^3 en fonction des matrices A et I_3 .
 - c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n)A + \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n)I_3$.
 - d) À l'aide de a), montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide de A et I_3 .

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer A^2 et A^3 . Que peut-on dire de la forme de ces matrices ? Pouvait-on s'y attendre ?
 - b) Sans calculer A^n , montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est symétrique.
2. a) Déterminer la matrice U qui vérifie $A = 2I_3 - U$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
 - b) Calculer U^2 et vérifier que $U^2 = \alpha U$ où α est un nombre réel à déterminer.

En déduire l'expression de U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ en fonction de U et de k (on distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$).
- c) À l'aide de la formule du binôme, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que A^n s'écrit sous la forme $A^n = a_n I_3 + b_n U$ où a_n et b_n sont deux nombres réels qui dépendent de n et qu'on calculera en éliminant le symbole Σ .
3. a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$. Qu'en déduit-on pour P et Q ?
 - b) Calculer la matrice $D = QAP$.

Montrer que $A = PDQ$ puis par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$ et retrouver le résultat du 2. c).
- c) Déduire de ce qui précède que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de P, Q et D^{-1} (on ne demande pas de calculer ses coefficients).

Y Y Y Y