DS n° 1
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. On considère quatre parties A, B, C et D d'un ensemble E telles que $A \cap D = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup D$. Prouver que $A = B$ et $C = D$ (on pourra s'aider d'un schéma mais le raisonnement devra être entièrement rédigé).

2. On considère l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(1-x) \end{array}$.

a) Soient x et x' dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x')$. A-t-on nécessairement $x = x'$? Justifier. Que peut-on en conclure pour f ?

b) Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1 et -2.

c) L'application f est-elle surjective ?

d) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \dfrac{1}{4} = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$, puis montrer que l'application f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$ et déterminer sa réciproque.

3. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application injective. Soit A une partie de E et $\overline{A}$ son complémentaire, montrer que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 2 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+2} + 3$.

2. Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k(2k+1) = 2n + 1 + (-1)^{n+1}(n+1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes : a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1-2k)$; b) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{-k}$; c) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1}$.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Déterminer une expression simplifiée, sans $\sum$, de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 3 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. À l'aide du triangle de Pascal, qu'on fera figurer sur la copie, donner le développement de $(x+2)^5$ où x est un nombre réel quelconque (on donnera des coefficients sous forme d'entiers).

2. a) Calculer la valeur du coefficient binomial $\dbinom{12}{2}$ sous forme d'un nombre entier.

b) Donner une expression simplifiée de $\dbinom{p+3}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

3. a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

b) Établir l'égalité : $k^2 = 2\dbinom{k}{2} + k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant p$, calculer $A_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{p-k}{p-n} \times 2^k$.

$\hookrightarrow$

Exercice 4 (Les trois questions sont indépendantes)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $A^2 - 4A$.
   b) En déduire que A est inversible, et préciser son inverse.
   c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$ où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) La matrice M est-elle symétrique ? antisymétrique ?
   b) Calculer ${}^{\mathrm{t}}MM$ et $M{}^{\mathrm{t}}M$. Que peut-on en déduire pour M ?

3. Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique.
   b) Montrer que si X est symétrique, alors ${}^{\mathrm{t}}AX + XA$ est symétrique.
   c) Montrer que si X est antisymétrique, alors ${}^{\mathrm{t}}AX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 5 **Calcul des puissances d'une matrice**

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2 puis P^3. Montrer alors que P est inversible et que $P^{-1} = P^2$.
2. Calculer AP, puis montrer que $P^{-1}AP = L$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = PL^nP^{-1}$.
4. On pose $J = L - I$. Calculer J^3.
5. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

6. En déduire, pour $n \geqslant 2$, les neuf coefficients de L^n. Vérifier que le résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
7. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ϒϒϒϒϒ