

DM n° 4

N. B. : Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible. Attention à justifier tous les résultats.

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction prolongée définie sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

2. a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par $f_n : x \mapsto e^x + nx^2 - 3$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive notée u_n .

2. Préciser la valeur de u_0 .

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0; 1[$.

4. Montrer que : $\forall x \in]0; 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

5. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n) .

6. Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

7. On suppose que $\ell > 0$. Calculer la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction. En déduire ensuite la valeur de ℓ .

8. Montrer que $\sqrt{\frac{n}{2}}u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire un équivalent simple de u_n .

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.

c) Étudier sur $]0, +\infty[$ les variations puis le signe de la fonction g définie par

$$g : x \mapsto 2x - \ln(x) - 1.$$

d) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites.

e) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat.

f) Calculer $f(1)$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide des informations obtenues dans les questions précédentes.

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J . Déterminer le sens de variation de f^{-1} et donner son tableau de variation.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n , il existe un unique réel x_n positif tel que $f(x_n) = n$.

d) Donner la valeur de x_0 .

e) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.