

DM n° 3

N. B. : Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.

Exercice 1 (Les deux questions sont indépendantes)

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n + 1}$.
 - Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
 - On pose $t_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n et en déduire une expression explicite de t_n en fonction de n .
 - Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de cette suite en déterminant sa limite éventuelle.
- On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} \times u_n^2$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
 - On pose $v_n = \ln(u_n)$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de u_n , la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

Exercice 2

On fixe un réel λ tel que $0 < \lambda \leq 1$, et on définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \lambda x(1 - x)$$

Ici, λ est donc une constante.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \lambda u_n(1 - u_n)$.

- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.
- Étude de la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Un exemple : on suppose $\lambda = \frac{3}{4}$. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ce cas.
 - On revient à $0 < \lambda \leq 1$. Montrer que le résultat trouvé en 2. a) est encore valable.
- En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .
- Déterminer ℓ dans le cas où $\lambda = \frac{3}{4}$.
 - Montrer que le résultat se généralise à tout λ tel que $0 < \lambda \leq 1$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $b_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

- Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- Établir l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x > -1$ et en déduire que : $x \leq -\ln(1 - x)$ pour tout $x < 1$.
- Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \ln(2) \leq b_n$. Que peut-on en déduire ?

ΥΥΥΥΥ