

DM n° 2

N. B. : Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.

Exercice 1

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}$.

On note enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $B = A - I_3$ dans $\mathcal{B}$.

- Vérifier que $g^2 = 0$. En déduire que $f^2 = -2f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, que f est bijectif et exprimer f^{-1} à l'aide de f et $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $g((x, y, z))$, puis déterminer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ et en donner des bases.
- On pose $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (-1, -1, 2)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$.
 - Vérifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Déterminer la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
 - En déduire la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = (-1)^n(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - ng)$.

Exercice 2

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note tM la matrice transposée de M .

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Écrire la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.
 - En déduire que φ est non bijectif.
- Calculer A^2 et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = 2^{n-1}A$.
- Montrer que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\{E_1, E_2 + E_3, E_4\}$, puis établir que $\dim \text{Im}(\varphi) = 3$.
 - En déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$ puis déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
 - Établir que $\text{Im}(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi(M) = 2M\}$.
 - Montrer qu'en réunissant une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$ on obtient une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice B de φ dans cette base.

Exercice 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Comparer les rangs et les traces de A et B .
- Les matrices A et B sont-elles semblables ?