

DM n° 1

N. B. : Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.

Exercice 1 Les quatre questions sont indépendantes

1. a) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 = 6A^2 - 8A - I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

b) Retrouver ce résultat en résolvant un système par la méthode du pivot de Gauss.

2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B.$$

3. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A_m est inversible (on ne demande pas de calculer A_m^{-1}).

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } i \neq j \end{cases}$

a) On note U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer U^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

b) Exprimer M en fonction de I_n et U .

c) En déduire M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

1. Résoudre le système $(S) \begin{cases} x - 2y + z - 3t - u = 0 \\ y + z - 2t = 0 \\ 2x - y + 5z - 12t - 2u = 0 \end{cases}$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

2. Résoudre le système $(S') \begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x - ay - z = 0 \\ (a - 1)x + ay + z = 0 \end{cases}$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

ΥΥΥΥΥ