Programme de la colle n° 6 (du 13/01 au 25/01)

I) Applications linéaires et matrices (suite et fin)

Révision du programme précédent (partie concernant ce chapitre).

Changements de bases dans les s.e.v. de $\mathbb{R}^n$: matrice de passage, théorème : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$; formule de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur. Formule de changement de bases pour la matrice d'une application linéaire, cas particulier d'un endomorphisme d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Matrices équivalentes, propriété : deux matrices sont équivalentes ssi elles représentent la même application linéaire, conséquence pour le rang ; théorème : toute application linéaire de rang r a une matrice de la forme $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; conséquence : deux matrices de même rang sont équivalentes ; propriété : $\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}(A)$, donc le rang est aussi le rang des lignes.
Matrices semblables, propriété : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans une base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Trace d'une matrice carrée : définition, propriétés de linéarité et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$; propriété : deux matrices semblables ont la même trace, conséquence : on peut définir la trace d'un endomorphisme d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

II) Espaces vectoriels de dimension finie (début)

Structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel : opérations, règles de calcul (admises), définition d'un e.v. de dimension finie par l'isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$; exemples : vecteurs du plan, $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dimensions de ces e.v.
Sous-espaces vectoriels : définition, un s.e.v. est un e.v., critère pratique pour montrer qu'un ensemble est un e.v., exemples. Propriété : l'intersection de deux ou plusieurs s.e.v. est un s.e.v. ; sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés d'un s.e.v. engendré par une famille de vecteurs (celles vues dans $\mathbb{R}^n$).

Applications linéaires : définition, propriétés immédiates, notation $\mathcal{L}(E, F)$; vocabulaire : forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, notation $\mathrm{GL}(E)$, exemples dont la Trace.
Propriétés (admises) : la composée de 2 applications linéaires est une application linéaire et si f est un isomorphisme, f^{-1} aussi.
Théorème (admis) : $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v. de dimension $\dim E \times \dim F$, cas particulier de $\mathcal{L}(E)$; restriction d'une application linéaire à un s.e.v.
Noyau, image et rang d'une application linéaire : définition, propriétés : ce sont des s.e.v., caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du noyau et de l'image ; théorème du rang (admis) ; théorème : équivalence entre bijectivité, injectivité, surjectivité lorsque $\dim E = \dim F$.

Question de cours :

Elle portera uniquement sur le programme ci-dessus (hors révisions). Les démonstrations vues en cours ne sont pas exigibles, sauf dans les cas très simples, mais des questions générales peuvent être posés à leur sujet, ainsi que toute question visant à tester la bonne compréhension du cours.

N. B. : Pas d'exercices sur le II) en 1ère semaine.