Programme de la colle n° 4 (du 18/11 au 30/11)

I) Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (suite et fin)

Révision du programme précédent (partie concernant ce chapitre).

Familles génératrices : définition, propriétés : toute famille contenant une famille génératrice est génératrice, on garde une famille génératrice en éliminant un vecteur combinaison linéaire des autres.

Familles libres, familles liées, indépendance linéaire : définition, condition pour qu'une famille de deux vecteurs soit liée, vecteurs colinéaires, propriétés : toute famille extraite d'une famille libre est libre, toute famille contenant le vecteur nul est liée, un vecteur non nul forme une famille libre, une famille est liée ssi l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres, condition pour qu'une famille libre reste libre après adjonction d'un vecteur.

Bases : définition, exemple de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; caractérisation des bases par l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur du s.e.v. considéré ; coordonnées d'un vecteur.

Dimension : propriété (admise) sur l'existence d'une base dans un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$; propriété : le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice ; théorème de la dimension et définition de la dimension ; propriétés : toute famille libre de F a au plus p éléments ($p = \dim F$) et si elle en a p c'est une base, toute famille génératrice a au moins p éléments et si elle en a p c'est une base ; conséquence pratique pour montrer qu'une famille est une base.

Théorème de la base incomplète (admis) ; lien entre dimension et inclusion pour deux s.e.v. et condition d'égalité entre deux sous-espaces à l'aide de la dimension, cas particulier de $\mathbb{R}^n$ et d'un s.e.v.
Rang d'une famille de vecteurs, méthode pratique de détermination à l'aide d'opérations élémentaires sur les coordonnées écrites en colonnes.

II) Applications linéaires et matrices (début)

Définition d'une application linéaire d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$ dans un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$; propriétés immédiates, notation $\mathcal{L}(E, F)$; vocabulaire : forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, notation $\mathrm{GL}(E)$, exemples ; théorème : détermination d'une unique application linéaire à l'aide de l'image d'une base.
Noyau et image d'une application linéaire : définition, propriété : ce sont des s.e.v. et l'image est engendrée par l'image d'une base, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du noyau et de l'image.

Question de cours :

Elle portera uniquement sur le programme ci-dessus (hors révision). Les démonstrations vues en cours ne sont pas exigibles, sauf dans les cas très simples, mais des questions générales peuvent être posées à leur sujet, ainsi que toute question visant à tester la bonne compréhension du cours.

N. B. : Pas d'exercices sur le II) en 1ère semaine.