Exercices supplémentaires : applications linéaires et matrices

Exercice 1
Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2
Soit l'application $u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z+t, x+2y-t, x+2y+3z-3t) \end{array} \right.$. Déterminer la matrice A canoniquement associée à u.

Exercice 3
Soit f l'application linéaire définie par $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (-2y+3z+t, -x-2y+3z+t, -x+2z+t) \end{array} \right.$

1/ Déterminer la matrice A de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

2/ On pose $u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,1,0,0), u_3 = (1,1,1,0), u_4 = (1,1,1,1), v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,0)$ et $v_3 = (0,2,1)$.
On admet que $\mathscr{B} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et que $\mathscr{B}' = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

Exercice 4
On note $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(e_1) = u(e_2) = u(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

1/ Déterminer la matrice A canoniquement associée à u.

2/ Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ puis le rang de u. u est-elle bijective ?

3/ Déterminer le noyau de u.

Exercice 5
Soit $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :
$\forall i \in [\![1,3]\!], \phi(e_i) = e_{i+1}$ et $\phi(e_4) = e_1$.

1/ Déterminer la matrice M de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2/ Démontrer sans calcul que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.

3/ Déterminer ϕ^{-1}, puis en déduire M^{-1}.

Exercice 6
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On pose $u = (1,0,1), v = (0,1,-1)$ et $w = (1,-1,1)$.
Démontrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
Que remarquez-vous ?

Exercice 7
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.

2/ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{rg}(f - \alpha \mathrm{Id})$ en fonction de α.

Exercice 8
Soient a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note u l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1/ Justifier que l'un au moins des trois réels a, b et c est non nul. Pour la suite, on supposera que a est non nul.

2/ Déterminer le rang de A. u est-il bijectif ?

3/ Déterminer l'image et le noyau de u.

Exercice 9
Soient a, b et c trois réels et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

1/ A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

2/ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Montrer que l'endomorphisme $f^3 - cf^2 - bf - a\mathrm{Id}$ est nul.

3/ En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A lorsque A est inversible.

4/ Déterminer une base de $\ker(f)$.